Über den Einfluß

einer

permanenten Dehnung auf die elektrische und thermische Leitfähigkeit der Metalle.

Von

Dr. Waclaw Werner.

Über den Einfluß

einer

permanenten Dehnung auf die elektrische und thermische Leitfähigkeit der Metalle.

Inaugural-Dissertation,

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Universität Freiburg (Schweiz)

ACAD.
LAUR BAT
BIBL

vorgelegt von

Waclaw Werner

aus Warschau.

Freiburg (Schweiz)

St.-Paulus-Druckerei.

1909

Die vorliegende Untersuchung wurde auf Anregung und unter Leitung des Herrn Geh.-Rats Prof. Dr. W. Voigt ausgeführt, dem ich für die gütige Förderung meiner Arbeit und vielfache Ermutigung meinen innigsten Dank aussprechen möchte. Ebenso bin ich Herrn Prof. Dr. E. Bose und Herrn Privatdozent Dr. F. Krüger für ihre gütige Beihilfe sehr verpflichtet.

Göttingen, Physikalisches Institut. Im Juli 1908.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545307_0029

I.

Einleitung.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war, den Einfluß zu bestimmen, den eine permanente Dehnung auf die thermische und elektrische Leitfähigkeit der Metalle ausübt und zwar sowohl in der Dehnungsrichtung als auch in der dazu senkrechten. Die erhaltenen Resultate sollten sodann erlauben, die Richtigkeit des Franz-Wiedemann'schen Gesetzes für den Fall der deformierten Leiter zu prüfen.

Über den Einfluß der mechanischen Deformationen, insbesondere der Dehnung, auf den elektrischen Widerstand sind mehrere Arbeiten veröffentlicht worden [1],

[1] Mac Gregor. Proc. Edinb. Roy. Soc. IX. 1876. — Pine. Proc. Americ. Acad. XI. 1876. — Angelini. Riv. scien. Ind. XVI. 1884. — Tomlinson. Proc. Roy. Soc. XXVI. 1878; XXXVII. 1884; XXXIX. 1886. — Tomlinson. Philos. Trans. Part I. 174. 1883. — Götz und Kurz. Exner's Repet. XXI. 1885. — Cantone. Rud. Linc. (5). VI. 1897. Beibl. XXI. 1897. — Gray and Henderson. Proc. Roy. Soc. LIII. 1893.

Eine Zusammenstellung der Literatur und der Resultate bis zum Jahre 1890 findet man bei: Faé. Atti. Ist. Venetto. VII. Beibl. XIII. 1891.

aber nicht in allen sind die Wirkungen der temporären und permanenten Strukturänderungen auseinander gehalten. In allen diesen Arbeiten, mit einer einzigen Ausnahme bei Tomlinson[1], sind als Material ausschließlich Drähte angewandt; dieses für die Messung sehr bequeme Material hat doch zwei bedeutende Nachteile: erstens ist seine Vorgeschichte recht verwickelt und der Anfangszustand, von dem die Versuche ausgehen, keineswegs als undeformiert zu betrachten; zweitens erlaubt dasselbe die Widerstandsänderungen nur in der Dehnungsrichtung zu beobachten. In der Tat, die schon erwähnte Stelle bei Tomlinson ausgenommen, wurde bisher nur diese Art des Effektes untersucht.

Der letztgenannte Forscher versuchte auch den Transversaleffekt zu bestimmen; er benutzte dazu 10 cm lange, 2 cm breite und 0.1 mm dicke Metallfolien, die er an ihren längeren Kanten isoliert in Fassungen einklemmte und der Breite nach dehnte, den Strom aber ließ er der Länge nach, also senkrecht zur Dehnungsrichtung, hindurchgehen; Widerstandsänderungen ließen sich in der Tat nachweisen. Aus den Daten, die für das elastische Verhalten des Metalles aus anderen Versuchen abgeleitet sind, berechnet Tomlinson die Gestaltänderung der Folien, was ihn auf die Änderung des spezifischen Widerstandes schließen läßt. Auf Grund seiner Messungen, die drei Metalle umfassen (Zink, Zinn und Eisen), und nach der Vergleichung derselben mit seinen eigenen Messungen über den longitudinalen Effekt an denselben, kommt er zu der Folgerung, daß der Sinn der beiden Arten des Einflusses sowohl für

[1] Phil. Trans. Part I. 174. 1883.

temporäre wie auch für permanente Dehnung der entgegengesetzte ist [1].

Nun scheint mir diese Folgerung anfechtbar zu sein ; zuerst für die permanenten Effekte, die er aus einer Versuchsreihe mit Zink auf Grund der Beobachtung ableitet, daß die Widerstandsänderung bei elastischer Dehnung mit der Zeit wächst : folglich muß ein Teil derselben den bleibenden Strukturänderungen zugeschrieben werden ; diese eine Beobachtung würde auch dann nicht genügen, eine allgemeine Regel aufzustellen, wenn man ihre Interpretation als richtig anerkenne. Aber die ganze Art, wie Tomlinson in diesem Falle seine Beobachtungen verwertet, kann nicht als einwandsfrei gelten. Er beobachtet die Änderung der Dimensionen der Leiter nach der Dehnung nicht direkt, sondern berechnet sie aus den für das betreffende Metall geltenden Elastizitätskonstanten. Dabei macht er, ausdrücklich oder stillschweigend, folgende Voraussetzungen :

1. Das elastische Verhalten eines Metalls sei von seiner Form unabhängig, also gelten für ein Blech dieselben Elastizitätskoeffizienten wie für einen Draht ; die verschiedene Vorgeschichte der beiden Arten sei ebenfalls ohne Einfluß.

2. Der lineare Kontraktionskoeffizient sei derselbe für beide zur Dehnungsrichtung senkrechte Richtungen. Bedenkt man aber, daß die Abmessungen in einer Richtung die in der anderen tausendmal übersteigen, so läßt sich diese Annahme nicht als selbstverständlich betrachten. Trifft sie nicht zu, so begeht man bei ihrer

[1] «Stress, applied in a direction transverse to that of the current, produces both temporary and permanent alteration of resistances of a nature opposite to that, resulting from longitudinal traction». Tomlinson, l. c.

Anwendung für die Berechnung beider zur Dehnungsrichtung senkrechter Dimensionen des Leiters Fehler, die von entgegengesetzten Vorzeichen sind. Die einen dieser Dimensionen bestimmen aber die Länge, die anderen den Querschnitt des stromdurchflossenen Leiters ; die hier eventuell begangenen Fehler würden sich also addieren bei der Berechnung der Leitfähigkeit.

3. Beim Dehnen erleiden die Metalle keine Dichteänderung. Wie die entsprechenden Daten der vorliegenden Arbeit und ebenfalls die Untersuchungen von Wertheim [1] für die permanent gedehnten Metalle beweisen, trifft das wenigstens für das von ihm untersuchte Zink sicher nicht zu [2] ; die Dichte war hier um zirka 0,2 % vermindert. Der Umstand, daß die Wirkung der Dehnung mit der Zeit wuchs, deutet darauf hin, daß die Elastizitätsgrenze überschritten war, also die Dichte nicht unverändert blieb, sondern um einen Betrag vermindert wurde, der die Größenordnung von 10^{-3} erreichen konnte ; in demselben Verhältnis war also der Querschnitt zu klein ausgerechnet. Da die berechnete Abnahme der Leitfähigkeit von der Ordnung 10^{-5} war, so sieht man, daß dieses Resultat in der erwähnten Fehlerquelle seinen Grund haben kann ; diese würde sogar genügen, einen entgegengesetzten Effekt zu verdecken, dessen Vorhandensein der von Tomlinson aufgestellten Regel widersprechen würde.

Alle Änderungen der elektrischen Leitfähigkeit, die Tomlinson auf Grund dieser Methode ausgerechnet hat, sind äußerst klein ; sie betragen etwa 10^{-7} bis 10^{-5} des ursprünglichen Wertes. Bei der Unsicherheit, ja

[1] Ann. de chim. et phys. III. 12. 1844.

[2] Für Zinn fand ich eine nur unbedeutende Dichteabnahme. Wertheim gibt eine etwa 2 mal so grosse an.

sogar Unrichtigkeit der Voraussetzungen, auf welchen diese Berechnung basiert, erscheinen diese Resultate völlig illusorisch, und die aus ihnen abgeleitete Regel bedarf einer Revision, umsomehr, als sie auch in das Wiedemann'sche Handbuch aufgenommen wurde.

Über den Einfluß der mechanischen Deformationen auf die Wärmeleitung ist mir nur die Arbeit von Senarmont [1] bekannt, der die von ihm für die Wärmeleitung der Krystalle ausgearbeitete Methode auf deformierte schlechte Leiter anwandte. Die Metalle wurden bisher, meinem Wissen nach, in dieser Richtung gar nicht untersucht.

[1] Ann. de chim. et phys. XXIII.

II.

Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit.

A. Das Material.

Folgende Metalle wurden auf die elektrische Leitfähigkeit untersucht: gewöhnliches und elektrolytisches Kupfer, Nickel, Zink, Kadmium, Zinn und eine Zinn-Kadmium-Legierung.

Die zur Untersuchung gelangten Metalle wurden in Form von Platten von 3 bis 6 $^{m}/_{m}$ Dicke, 35 $^{c}/_{m}$ Länge und 11 $^{c}/_{m}$ Breite hergestellt. Wenn möglich, wurden sie direkt in dieser Form gegossen, wodurch jede vorherige Deformation, die die Verhältnisse verwickeln könnte, vermieden war. Nur da, wo ein solcher Abguß nicht leicht zu verschaffen war (wie z. B. bei Kupfer und Nickel), wurden die Platten aus Blech ausgeschnitten, vor der Untersuchung aber sorgfältig ausgeglüht, um diejenigen Einflüsse möglichst vollständig zu entfernen, die das Metall während seiner Bearbeitung erlitten hatte.

Vom benutzten Material mußte man verlangen, daß es homogen sei und sich sowohl gut dehnen wie auch bearbeiten ließe. Was im besondern die gegossenen Platten betrifft, so sollten sie keine Risse oder Sprünge

zeigen und keine Luftblasen der Oxydschichten enthalten. Die Herstellung der Platten von den erwähnten Dimensionen, die diese Bedingungen erfüllten, war auch dann schwierig, wenn man sie ursprünglich dicker machte, und oft mußte ich mehrere Stücke versuchen, bis ich eins fand, das sich gleichmäßig und stark genug dehnen ließ. Diese Schwierigkeiten haben die Zahl der untersuchten Metalle wesentlich beschränkt.

Die Platten wurden gewöhnlich vor der Dehnung abgedreht, um die gewünschte und dabei gleichmäßige Dicke zu erhalten, und auch um die Homogenität des Materials einigermaßen beurteilen zu können. Auf eine

Fig. 1.

Seite der Platte wurde ein Netz aufgetragen, das aus zwei Scharen aufeinander senkrechter, im Abstande von 4 $^{m}/_{m}$ voneinander eingeritzten Striche bestand; es diente dazu, die Gleichmäßigkeit der Dehnung kontrollieren und ihren Betrag messen zu lassen.

Dann wurden die Platten an ihren Enden in Eisenhalter eingenietet; um die Abschwächung des Querschnittes durch die Nietlöcher aufzuwiegen, wurde von jeder Seite einer Platte in ihrem von den Eisenhaltern freien Teile ein Streifen von 1 $^{c}/_{m}$ Breite ausgeschnitten; die obenstehende Zeichnung zeigt die Gestalt der Platte und der Halter.

Die ausgeschnittenen Streifen wurden nachher zur

Bestimmung der Leitfähigkeit des ungedehnten Metalls benutzt.

Jetzt wurden die Platten in einer Zerreißmaschine bis zum gewünschten Grade gedehnt. Der Betrag der Dehnung wurde mit Hilfe des Liniennetzes gemessen. Aus den Stellen, wo dieser Betrag konstant war und die Netzlinien parallel blieben, wo also die Dehnung gleichmäßig vor sich gegangen war, wurden Stücke von geeigneter Größe ausgesägt. Aus ihnen waren nachher die Stäbchen ausgesägt, die für die Untersuchung dienen sollten.

In den ersten Versuchsreihen waren nur drei Sorten von Stäbchen aus jeder Platte gemessen:

1. Die aus ungedehntem Metall geschnittenen. Sie sind weiter unten mit dem Buchstaben U mit der Ordnungszahl bezeichnet.

2. Die, deren Länge in die Richtung der Dehnung fiel. Ihre Bezeichnung war L (längs gedehnt).

3. Die, deren Länge normal zur Dehnungsrichtung lag. Ihre Bezeichnung war Q (quer gedehnt).

In weiteren Versuchen waren zur Kontrolle noch andere gemessen:

4. Die, deren Länge unter 45° zu der Dehnungsrichtung lag. Ihre Bezeichnung war S (schräg gedehnt).

Läßt sich die Elektrizitätsleitung in einem Metalle wie die in einem Krystalle auffassen, so gilt für jede Richtung, die gegen die der Dehnung um einen Winkel φ geneigt ist:

$$\lambda_\varphi = \lambda_L \cos^2\varphi + \lambda_Q \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

wo λ_L und λ_Q die Leitfähigkeiten längs und quer zur Dehnung bedeuten.

In unserem Falle ist $\varphi = 45^0$, also

$$\lambda_{45^0} = \lambda_S = \frac{\lambda_L + \lambda_Q}{2}$$

Die im zweiten Teile dieser Arbeit untersuchten Isothermen in den gedehnten Metallen nähern sich so gut den mit einer ihrer Achsen in die Dehnungsrichtung fallenden Ellipsen, wie sie die Theorie der Leitung in Krystallen fordert, daß diese Annahme auch für die Elektrizitätsleitung als berechtigt erscheint. Der Wert für λ_S konnte somit als Kontrollwert für die Leitfähigkeiten in den beiden Hauptrichtungen dienen.

Die Bestimmung der elektrischen Leitfähigkeit bestand:

1. Aus der Messung des Widerstandes.
2. Aus der Bestimmung des Querschnittes.

B. Methode der Widerstandsmessung.

Die Messung der Widerstände erfolgte nach der Methode der Thomson'schen Doppelbrücke, die gemäß den Vorschlägen von Prof. Voigt in zwei Punkten modifiziert war.

Wie das Schema in der Figur 2 zeigt, sind die Stücke, deren Widerstände miteinander verglichen werden sollen, mit der Batterie B und dem zwischen ihnen befindlichen Widerstande W hintereinander geschaltet. Die an ihren Enden angebrachten Schneiden führen zu den beiden Rheostaten R_1 und R_2; diese werden durch je einen Gleitkontakt in zwei Teile geteilt vom Widerstande *a* und *b*, bzw. *c* und *d*; so daß:

$$R_1 = a + b \qquad R_2 = c + d .$$

Die Gleitkontakte sind mit dem Galvanometer G verbunden. Sind x und y die Widerstände derjenigen

Teile der untersuchten Stücke, die sich zwischen je zwei Schneiden befinden, so lautet die Bedingung der Stromlosigkeit des Galvanometerkreises :

$$(ay - bx)(c + d) + W(ad - bc) = 0 . \qquad (1)$$

Hierbei sind die Übergangswiderstände an den Schneiden nicht besonders berücksichtigt, sondern als in den Werten von a, b, c und d enthalten betrachtet.

Die gewöhnliche Anwendung der Gleichung ist die,

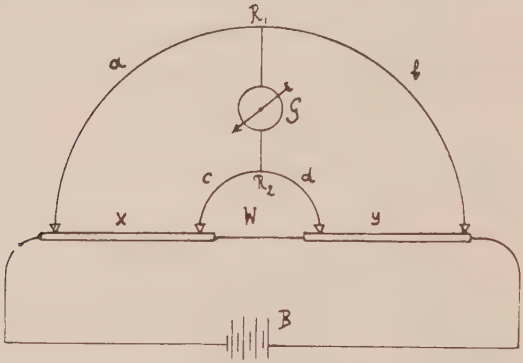

Fig. 2.

daß man das zweite Glied zum Verschwinden bringt, entweder dadurch, daß man W sehr klein gegen $c + d = R_2$ macht, oder daß man dafür sorgt, daß :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (2)$$

ist. In der bei der vorliegenden Untersuchung benutzten Ausführung der Brücke war weder die eine, noch die andere Bedingung realisiert. Die ziemlich scharfen Schneidekontakte stellten Widerstände von beträchtlicher Größe dar und da diese in den Größen a, b, c und d enthalten sind, so waren die letzteren nicht genau

zu bestimmen und folglich die Gleichung (2) nicht zu erfüllen.

Der anderen Bedingung des Verschwindens von W gegen R_2 war deshalb nicht zu genügen, weil, um möglichst spannungsfreie Lage der untersuchten Stäbchen zu erhalten, der Verbindungsdraht biegsam, also verhältnismäßig dünn und lang genommen werden mußte. Sehr großer Betrag von R_2 würde die Empfindlichkeit der Methode stark herunterdrücken.

Die ersten Messungen, die so ausgeführt waren, daß die Gleichung (2) erfüllt sein sollte, führten zu keinen hinreichend genauen Resultaten ; anderseits war aber die getroffene Anordnung aus anderen Gründen zweckmäßig und bequem, und es empfahl sich, eher eine Änderung in der Methode einzuführen und die Anordnung beizubehalten.

Diese Änderung bestand darin, daß der Widerstand W veränderlich gemacht, und eine solche Lage der beiden Gleitkontakte gesucht wurde, bei welcher die Veränderung von W keine Verschiebung der Stromgleichgewichtslage verursachte. Bezeichnet W_1 den neuen Wert von W, so tritt neben (1) noch eine zweite Gleichung hinzu :

$$(ay - bx)(c + d) + W_1 (ad - bc) = o .$$

Sie ist nur dann mit (1) verträglich, wenn die beiden Glieder einzeln verschwinden :

$$ad - bc = o$$

$$ay - bx = o$$

Aus der letzten Gleichung folgt nun die Formel für die Brücke :

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \qquad (3)$$

Hier enthalten aber a und b noch immer die Übergangswiderstände an den Schneiden; um diese zu eliminieren, war eine zweite Modifikation in die Methode eingeführt; zwischen die äußeren Schneiden und die Enden des Rheostates R_1 waren zwei Hilfswiderstände eingeschaltet, deren Verhältnis zu R_1 vorher gemessen wurde; dadurch waren a und b ebenfalls veränderlich gemacht. Nach der Einschaltung dieser Widerstände, deren Größe wir mit α und β bezeichnen, war eine neue Gleichgewichtslage aufgesucht; seien a′ und b′ die Teile, in die R_1 durch den Gleitkontakt in dieser neuen Lage geteilt wurde, so ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + a'}{\beta + b'} \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + a - a'}{\beta + b - b'}$$

Bedeutet δ_1 die Verschiebung des Kontaktes von der ersten zu der zweiten Gleichgewichtslage, so ist:

$$\delta_1 = a' - a = b - b'$$

und es folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha + \delta_1}{\beta - \delta_1} \qquad (5)$$

Vertauscht man α und β und wiederholt die Messung, so bekommt man eine andere Verschiebung δ_2, und die Gleichung für $\frac{x}{y}$ lautet jetzt:

$$\frac{x}{y} = \frac{\beta + \delta_2}{\alpha + \delta_1}$$

Aus den zwei letzten Gleichungen bekommt man eine neue

$$\delta_2 - \delta_1 = \alpha - \beta \,, \qquad (6)$$

die zur Kontrolle der Messung dienen kann.

C. Praktische Ausführung der Widerstandsmessung.

Zur Erläuterung diene Figur 3. Wie man aus dieser sieht, war der Hauptstromkreis gebildet durch eine Batterie B einen Stromschlüssel S_1, einen Amperemeter A, zwei Widerstände r_1 und r_2, einen Elektromagneten E und die zu vergleichenden Stäbchen x und y, zwischen welchen sich der ausschaltbare Hilfswiderstand R_3 befand; dieser erlaubte die Größe des Widerstandes W, der zwischen den beiden inneren Schneiden herrschte, zu ändern. Der Stöpselrheostat r_1 diente dazu, um nur dann wenn nötig, die volle Stromstärke durch den Hauptstromkreis zu schicken und sonst nur einen Teil davon zu gebrauchen, um eine unnötige Wärmeerzeugung in den Apparaten zu vermeiden. Die Größe der maximalen Stromstärke, die bei ausgeschaltetem r_1 floß, regulierte der Kurbelrheostat r_2. Der Zweck des Elektromagnets E wird weiter unten erklärt.

Vier Schneiden, die auf die Untersuchungsstäbchen sich stützten dienten, zur Aufnahme des Stromes in den Meßkreis; die zwei inneren waren direkt mit den Enden des Rheohordes R_2 verbunden; von den äußeren führten die Zuleitungsdrähte zunächst zum Kommutator K_1 von diesem weiter zu den Hilfswiderständen α und β, von diesen ab zum zweiten Kommutator K_2 und von diesem erst zu dem Rheohord R_1. Diese Anordnung von Kommutatoren erlaubte erstens *a* und *b* zu

vertauschen, zweitens a mit α und b mit β zu verbinden, oder umgekehrt; so waren vier verschiedene Schal-

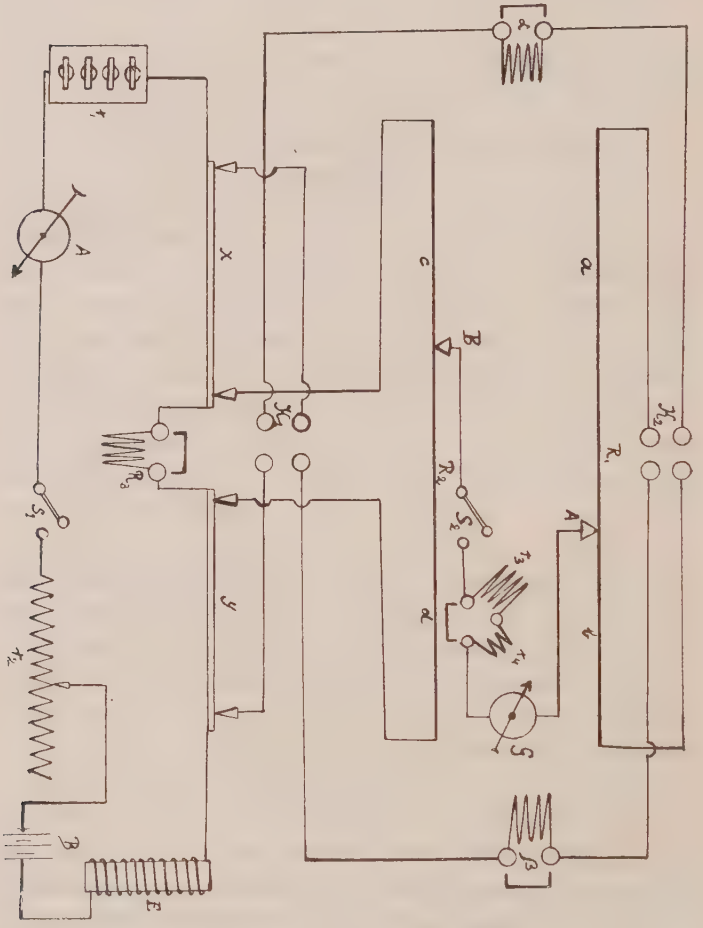

Fig. 3.

tungen möglich und jedes Stäbchen war bei allen vier Kombinationen gemessen.

R_3, α und β waren aus Konstantandraht gemacht und mit Quecksilberkontakten versehen; durch dicke Kupferbügel konnten sie kurzgeschlossen werden. R_1 und R_2 waren zwei parallel gespannte Konstantandrähte von 1 $^{m}/_{m}$ Durchmesser und 1 m Länge; sie waren in einem Holzkasten eingebaut, der mit Paraffinöl gefüllt war, um den Drähten eine gleiche und konstante Temperatur zu

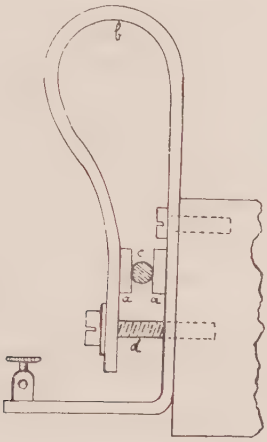

Fig. 4.

sichern und sie vor lokalen Erwärmungen zu schützen. Als Kontakte dienten je zwei Silberdrahtstücke, a, a, die auf beiden Seiten einer flachen Messingfeder b angelötet, den Meßdraht c umgaben; eine Schraube d diente zur Regulierung des Druckes. Fig. 4 zeigt die Anordnung des Kontaktes. Das ganze war isoliert an einem Schieber befestigt, der längs eines mit Millimeterteilung versehenen Holzlineals dem Drahte parallel verschoben werden konnte. Diese Einrichtung lieferte vorzügliche, sichere, den Draht wenig gefährdende Kontakte.

Zwischen den beiden Kontakten befand sich ein

Rubens'sches Panzergalvanometer, dem ein Schlüssel S_2 und zwei Widerstände r_3 und r_4 vorgeschaltet waren; die letzteren waren in Dreieck angeordnet, so daß sie mit einem Kupferbügel einzeln oder hintereinander in den Stromkreis eingeschaltet, oder ganz ausgeschaltet werden konnten.

Die zu vergleichenden Stäbchen wurden auf eine Hartgummiplatte aufgekittet; auf beiden Enden jedes Stäbchens waren dünne Kupferdrähte angelötet. Beim Löten waren die Stäbchen zwischen zwei dicke Kupferstücke gepreßt, so daß nur die für die Messung gleichgültigen Enden sich erwärmen konnten; der eigentlich gemessene Teil war also vor einer schädlichen Erwärmung geschützt. Aus demselben Grunde wurde darauf

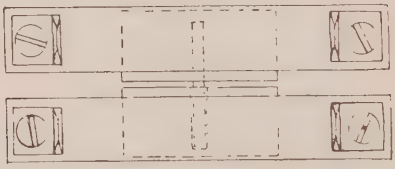

Fig. 5.

aufgepaßt, den Kitt beim Aufkitten möglichst kühl anzubringen.

Die Hartgummiplatte mit den Stäbchen wurde auf eine am Boden einer Glasschale befestigte Glasplatte gelegt, die für sie eine ebene Unterlage bildete. Dann wurden auf die Stäbchenenden die vier Schneiden aufgesetzt, die zu der Meßbrücke führten. Sie waren aus hartem Messing gemacht und scharf geschliffen. Je ein Paar derselben war an einem Hartgummibalken befestigt, so daß die Abstände eines jeden Paares unverändert blieben; diese betrugen $82{,}^{m}_{m}$; die Schneiden

waren ca. 3 $^{m}_{m}$ breit. Die Balken waren mit Hilfe einer Spindel gegeneinander drehbar angeordnet, was einen sicheren Kontakt aller vier Schneiden mit den Stäbchen schuf.

Es hat sich während der Untersuchung gezeigt, daß auf die Güte des Kontaktes zwischen Stäbchen und Schneiden großes Gewicht gelegt werden mußte, da bei unvollkommenem Kontakt die Übergangswiderstände sehr schwankend waren und die Messung unmöglich machten. Deshalb mußten die Schneiden vergoldet werden und ebenso die Enden der Stäbchen ; die Vergoldung der letzten ragte einige Millimeter hinter die Schneiden hinaus, aber bei der sehr dünnen Goldschicht war die dadurch bewirkte Widerstandsänderung ganz unbedeutend. Das Hartgummigestell wurde mit Bleigewichten beschwert, deren Größe je nach der Härte des eben untersuchten Metalls variierte ; diese dienten dazu, den Kontakt inniger und sicherer zu machen.

Die Glasschale, in welcher sich die Stäbchen und das Hartgummigestell mit den Schneiden befanden, war mit Paraffinöl gefüllt, um die Temperaturen beider Stäbchen gleich und konstant zu machen. Ebenso waren die beiden Kommutatoren K_1 und K_2, die Stromschlüssel S_1 und S_2, sowie die Widerstände α, β, r_3, r_4 und R_3 mit Quecksilberkontakten versehen und in Glasgefässe mit Paraffinölbad eingetaucht. Aber auch diese Maßregel genügte nicht, um örtliche elektromotorische Kräfte zu vermeiden ; nur das wurde erreicht, daß ihre Stärke während der Messung ungeändert blieb. Diese örtlichen Kräfte bewirkten, daß auch bei geöffnetem Hauptstromkreis, beim Schließen des Galvanometerkreises im Galvanometer ein Ausschlag entstand ; deshalb zog ich vor, den letzten Stromkreis zuerst zu schließen, wodurch die Nullage des Galvanometers ge-

ändert wurde, dann aber ziemlich konstant blieb ; erst nachdem dieser Nullpunkt abgelesen war, schloß ich den Hauptstrom und las den Ausschlag ab.

Dabei zeigte sich, daß die ganze Anordnung eine induktive Wirkung auf den Galvanometer habe · um diese aufzuheben diente der Elektromagnet E, der so abgemessen und orientiert war, daß das Schließen des Stromes bei geöffnetem Galvanometerkreise keinen Ausschlag im Galvanometer hervorrief.

Die Größe der Widerstände α und β war :

$$\alpha = 0{,}7900\ R_1$$
$$\beta = 0{,}8009\ R_1$$

Der Galvanometerwiderstand betrug 9,5 Ohm. Das Fernrohr war um 2 m von demselben entfernt, die Skala stand noch 1 m weiter. Die Astasie des Galvanometers war nicht sehr weit getrieben ; die Schwingungsdauer betrug etwa 4 Sekunden. Die erreichte Empfindlichkeit war 5.10^{-9} A pro ein Skalenteil.

Der Gang der Beobachtung war folgender :

1. bei beliebig gestelltem Kontakte B und eingeschaltetem Widerstande R_3 wird A solange verschoben, bis der Galvanometerausschlag verschwindet.

2. R_3 wird ausgeschaltet und der Strom geschlossen ; in der Regel erfolgte ein Ausschlag im Galvonameter, der jedoch nicht groß war, da die Empfindlichkeit durch Ausschaltung von R_3 vermindert wurde.

3. B wird verschoben und dieselbe Operation wiederholt ; es wird nach derjenigen Stellung von B gesucht, in welcher die Ein- oder Ausschaltung von R_3 die Gleichgewichtslage nicht beeinflußt.

4. Nachdem diese Lage gefunden wurde, wird die Stellung von A abgelesen.

5. α und β werden eingeschaltet und bei unverän-

derter Lage von B eine neue Gleichgewichtslage durch Verschiebung von A gesucht.

6. α und β wieder ausgeschaltet und die Ablesung (4) zur Kontrolle wiederholt.

Der Unterschied zwischen den beiden Lagen von A bei aus- bzw. eingeschalteten α und β lieferte die in der Gleichung (5) auftretende Größe δ.

Diese Messung wurde viermal wiederholt bei verschiedenen Stellungen der Kommutatoren. Je zwei der gewonnenen Zahlen müßten einander gleich sein; der Unterschied zwischen dem einen und anderen Paar von Werten mußte gemäß (6) gleich sein β-α; dabei war:

$$\beta - \alpha = 0{,}0109\ R_1 .$$

D. Die Genauigkeit der Widerstandsmessung.

Die Genauigkeit der Methode mögen folgende Daten veranschaulichen. Die größte Sorgfalt bei der Messung mußte auf die Manipulationen 1. bis 3. angewandt werden; bei diesen wurde auch die volle Stromstärke gebraucht, die bei dünnen Stäbchen 0,1 A., bei dickeren 0,2 bis 0,3 A. betrug. War, nach Ausschaltung von R_3, noch ein Ausschlag vorhanden, so bewirkte die Änderung desselben um einen Skalenteil einen Unterschied von 4 Tausendstel des berechneten Widerstandes; und da ein halb so großer Ausschlag noch beobachtet werden konnte, so betrug der wahrscheinlich hier begangene Fehler 2.10^{-3}.

Bei den weiteren Schritten 4. bis 6. war die Empfindlichkeit so groß, daß die Stromstärke auf ihren zwanzigsten Teil herabgesetzt werden mußte durch Einschaltung von 100 Ohm in r_1, und trotzdem entsprach einer Verschiebung des Kontaktes A um 1 $^{m}/_{m}$ ein Aus-

schlag von 200 Skalenteilen. Hier wurde die Genauigkeit nur durch die Genauigkeit in der Ablesung der Stellung von A bestimmt. Diese betrug 0,2 $^{m}/_{m}$, was einer Fehlergrenze von $0{,}5.10^{-3}$ bei der Berechnung des Widerstandes entspricht.

Die Summe beider Fehler beläuft sich auf $2\text{-}2{,}5.10^{-3}$, und in der Tat waren die größten Unterschiede zwischen den einzelnen Messungen an einem Stäbchen fast bei allen Metallen von dieser Größenordnung. Nur bei elektrolytischem Kupfer, bei welchem die 5 q^{mm} dicken Stäbchen einen Widerstand von nur 3.10^{-4} Ohm hatten, war die Genauigkeit geringer ; der Einfluß der Einstellung (3) auf die Messung war dabei größer, so daß die einzelnen Resultate um 0,6 bis $1{,}3.10^{-3}$ differierten.

Eine weitere Fehlerquelle bei der Widerstandsbestimmung konnte darin bestehen, daß nicht die ganze Schneide, sondern nur einzelne Punkte in Berührung mit dem Stäbchen waren, wodurch die zwischen den Kontaktstellen eingeschlossenen Metallstücke von veränderlicher Länge waren. Die zwei extremsten Fälle, wo einmal nur zwei Punkte, die auf einer Längsachse des Stäbchens liegen, den Kontakt bilden, das andere Mal nur die zwei, die auf einer Diagonale sich befinden, ergeben einen Unterschied von 1.10^{-3} der Länge, wenn die Schneiden 3 $^{m}/_{m}$ breit und ihr Abstand 80 $^{m}/_{m}$ war.

Als Vergleichswiderstand wurde immer ein Stäbchen benutzt, das aus derselben Platte herausgeschnitten war wie die zur Untersuchung bestimmten. Es war an die Hartgummiplatte festgekittet, und immer von demselben Schneidenpaar berührt ; unter das andere kamen dann die zu untersuchenden Stäbchen ; dadurch wurde erreicht, daß innerhalb einer Versuchsreihe der Vergleichungswiderstand unverändert blieb und sein Verhältnis zu dem gemessenen der Einheit

nahe war; ebenfalls waren die widerstandsleistenden Längen der untersuchten Stücke konstant, so daß es bei der Berechnung der Leitfähigkeit nur auf den Querschnitt ankam.

Die Temperatur war in großer Annäherung ohne Einfluß auf das Verhältnis der beiden verglichenen Widerstände, denn infolge des Ölbades waren beide Stäbchen und beide Hartgummibalken gleich temperiert; diese und jene waren aus demselben Material, also brachte eine Temperaturänderung gleiche Längeänderungen in ihnen hervor; außerdem unterscheiden sich nach Tomlinson[1] die Temperaturkoeffizienten der gedehnten Metalle nur unwesentlich von denen der ungedehnten, und da die Temperaturschwankungen überhaupt klein waren, so kann man die dabei entstandenen Änderungen des Widerstandes als für beide Stäbchen gleich ansehen. Übrigens wurden die Temperaturen bei einigen Versuchsreihen notiert.

E. Die Berechnung der Leitfähigkeit.

Bedeutet r den Widerstand, Q den Querschnitt, L die widerstandsleistende Länge eines Stäbchens, so ist seine Leitfähigkeit:

$$\lambda = \frac{L}{Q \cdot r}$$

Ist r_0 der Widerstand des Vergleichsstäbchens, so ist:

$$\lambda \frac{r_0}{L} = \frac{1}{Q \frac{r}{r_0}}$$

[1] Tomlinson; l. c.

Da während einer Versuchsreihe r_0 und L sich nicht ändern, so bilden die rechten Seiten der obigen Gleichungen zu λ proportionale Größen. Bei der vorliegenden Untersuchung handelt es sich nur um relative Zahlen, man kann also r_0 und L gar nicht in die Berechnung einführen und nur die Ausdrücke $\frac{1}{Q\frac{r}{r_0}}$ berechnen, die zu der Leitfähigkeit proportional sind.

Die Widerstandsmessungen lieferten die Werte $\frac{r}{r_0}$.

Die Querschnitte Q wurden mittelbar gefunden aus der Messung der Länge, Bestimmung der Masse und der Dichte des Metalls.

Die Länge war mit einer Schublehre gemessen. Bei den dünnen Stäbchen wurden 6, bei den dicken 14 Messungen vorgenommen ; der mittlere Fehler betrug dabei 0,2 bis $0{,}5.10^{-3}$.

Für die Masse wurde der Mittelwert aus 10 Wägungen für die dünnsten Stäbchen genommen ; für die dickeren von etwa 1 gr. war die Zahl der Wägungen auf 6, bei den ganz diken von 4 bis 9 gr. auf 4 beschränkt. Der mittlere Fehler schwankte zwischen 0,1 und $0{,}2.10^{-3}$.

Die Dichte wurde an größeren Stücken mit der hydrostatischen Wage bestimmt ; jede Wägung wurde viermal wiederholt. Die Bestimmung war einmal für das ungedehnte, einmal für das gedehnte Metall durchgeführt, um zu sehen, ob sich die Dichte nach der Dehnung geändert hat.

Aus diesen Daten wurden die Ausdrücke $\frac{1}{Q\frac{r}{r_0}}$ berechnet, und für jede Sorte aus den für die einzelnen Exemplare geltenden Werten der Mittelwert gebildet. Schließlich war der Mittelwert für das ungedehnte Metall gleich 100 gesetzt, und die übrigen auf die gleiche

Einheit zurückgeführt; die so gewonnenen Zahlen zeigen unmittelbar den Einfluß der Dehnung auf die Leitfähigkeit.

Weiter wurden die Ausdrücke $\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.}$ berechnet, die das mit 100 multiplizierte Verhältnis der Leitfähigkeiten in den beiden Hauptrichtungen darstellen. Sie dienen zum Vergleich mit den entsprechenden Daten der thermischen Untersuchung.

Summieren wir alle die Fehler, die bei der Messung des Widerstandes und bei der Bestimmung des Querschnittes sich als wahrscheinlich ergeben, so erhalten wir 4.10^{-3} als den mittleren Fehler der Leitfähigkeitsbestimmung.

Die ersten Messungen waren mit sehr dünnen Stäbchen ausgeführt, deren Querschnitt 0,25 q^{mm} betrug, um den gemessenen Widerstand möglichst groß und deshalb genau meßbar zu machen; die Resultate waren aber ungünstig; die Unterschiede zwischen einzelnen Individuen derselben Sorte waren größer, als die Genauigkeit der Messung es erwarten ließ. Den Grund dieser Abweichung muß man in zwei Quellen suchen; erstens konnten die Stäbchen bei der Bearbeitung weitere Deformationen erlitten haben, besonders in ihrer Oberflächenschicht; zweitens waren die untersuchten Metalle nicht vollkommen homogen. Beide Fehlerquellen werden vermindert, wenn man die Querschnitte grösser nimmt: die festeren Stäbchen widerstehen besser der Bearbeitung und die Oberflächenschicht bildet einen kleineren Bruchteil des ganzen Querschnittes; auch die Unhomogenitäten gleichen sich besser aus. Deshalb war es geraten, die Stäbchen so dick zu nehmen, als es die Methode erlaubte, sie noch hinreichend genau zu messen, und als es das in begrenzter Menge zur Verfügung stehende Material zuließ.

Daß diese Überlegung richtig war, hat sich an den mit dem käuflichen Kupfer erzielten Resultaten gezeigt; nachdem die Querschnitte 6 mal so groß als ursprünglich genommen waren, fielen die Abweichungen auf $^1/_3$ herab, obwohl für die Herstellung beider Gruppen dieselbe Platte benutzt wurde.

Immerhin ist es als eine grundsätzliche Schwäche der Methode anzusehen, daß sie mit verschiedenen Individuen zu tun hat, die von vorneherein nicht identische Eigenschaften haben, und so zu den durch die Deformation hervorgebrachten Effekten ihre individuellen Unterschiede hinzuaddieren.

F. Resultate.

1. Käufliches Kupfer.

Die Dichte wurde für ein ungedehntes und für zwei gedehnte Stücke gemessen. Es ergab sich:

$$\delta_u = 8{,}8621$$

$$(\delta_g)_1 = 8{,}8635 \qquad (\delta_g)_2 = 8{,}8612$$

Die Unterschiede liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, die Dichte wurde nicht merklich geändert. Der Berechnung war der Mittelwert aus allen drei Bestimmungen zu grunde gelegt.

$$\delta = 8{,}862$$

Zuerst wurden dünne Stäbchen von 0,25 q^{mm} Querschnitt gemessen. Die Resultate zeigten aber so große Abweichungen, daß sogar der Sinn der Änderung in der Längsrichtung nicht sicher festzustellen war. Bei dickeren Stäbchen von 1,6 q^{mm} Querschnitt waren die Resultate bedeutend besser geworden; sie sind in der Tafel I zusammengefaßt.

Tafel I.

Dehnung 10,5 % — Käufliches Kupfer

N°	l mm	m gr.	δ	Q qmm	r/r₀	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_0}}$	Mittel	$\frac{\lambda}{\lambda_u} \cdot 100$
U_1	75,49	1,0368		1,550	1,174	0,5496	0,5477	**100,0**
U_2	75,27	1,0779		1,616	1,134	0,5457		
L_1	74,27	1,0227	8,862	1,554	1,167	0,5515	0,5527	**100,9**
L_2	74,43	1,0391		1,575	1,146	0,5539		
Q_1	75,30	1,0146		1,520	1,170	0,5621	0,5617	**102,5**
Q_2	75,32	1,0449		1,566	1,138	0,5613		

Längs Zunahme 0,9 %
Quer Zunahme 2,5 %

$$\left[100 \frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 98{,}4 \ .$$

2. Elektrolytisches Kupfer.

Die Platte war in der gewünschten Form von der A. E. G. geliefert. Die Stäbchen waren viel dicker genommen als vorher; ihr Querschnitt betrug etwa 4,8 $q\frac{m}{m}$. Diese Dicke konnte für Kupfer nicht weiter überschritten werden, denn schon bei diesen Dimensionen gestaltete sich die Widerstandsmessung schwierig; die Einstellung mußte mit großer Sorgfalt geschehen und trotzdem waren die Resultate weniger befriedigend als bei anderen Metallen; die Differenzen bei einem und demselben Exemplare überschritten 0,1 % des gemessenen Widerstandes.

Die Dichte war:

$$\delta_u = 8{,}885 \qquad \delta_g = 8{,}889$$

Also wieder keine festzustellende Dichteänderung. Für die Berechnung war der Mittelwert benutzt :

$$\delta = 8{,}887 \quad .$$

Die Resultate enthält Tafel II.

Tafel II.

Dehnung 5 % — Elektrolytisches Kupfer

N°	l mm	m gr.	δ	Q qmm	r/r$_o$	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_o}}$	Mittel	$\frac{\lambda}{\lambda_u} \cdot 100$
U_1	86,18	3,7406		4,883	0,9841	0,2081	0,2077	**100,0**
U_2	88,34	3,7665		4,797	1,0054	0,2073		
L_1	86,86	3,7781		4,894	0,9821	0,2081	0,2083	**100,3**
L_2	87,39	3,8290		4,930	0,9733	0,2084		
Q_1	85,79	3,7453	8,887	4,887	0,9887	0,2059	0,2060	**0,992**
Q_2	85,59	3,7561		4,938	0,9828	0,2061		
S_1	84,65	3,6406		4,839	0,9926	0,2082	0,2081	**100,2**
S_2	85,18	3,6872		4,870	0,9885	0,2077		
S_3	83,13	3,6087		4,884	0,9829	0,2083		

Längs Zunahme 0,3 % (?)
Quer Abnahme 0,8 %

$$\left[100 \frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 101{,}1$$

Das Resultat ist insofern wichtig, als es den einzigen Fall darstellt, wo einer Zunahme der Leitfähigkeit in einer Richtung scheinbar eine Abnahme in der anderen entspricht. Untersucht man aber den Fall näher, so kommt man zu der Überzeugung, daß der beobachtete Effekt in der Längsrichtung zu klein und unsicher ist, um über ihn mit Sicherheit urteilen zu können. Der

Unterschied zwischen den beiden Werten für das ungedehnte Metall ist größer als die Differenz zwischen den Mittelwerten für das ungedehnte und längsgedehnte; außerdem sind zwei Werte von je einer Sorte (U_1 und L_1) einander gleich. Nimmt man sogar zur Kontrolle den Wert für die unter 45° gedehnten Stäbchen hinzu und berechnet daraus die wahrscheinlichen Werte für λ_L, λ_Q und λ_S, so erhält man folgende Zahlen:

$$\frac{\lambda_L}{\lambda_u} 100 = 100{,}5 \qquad \frac{\lambda_Q}{\lambda_u} 100 = 0{,}987 \qquad \frac{\lambda_S}{\lambda_u} 100 = 0{,}996$$

Bedenkt man, daß die Messungen ungenauer als die übrigen waren, so daß der vorauszusehende mittlere Fehler 0,5 % beträgt, so sieht man, daß der Effekt in der Dehnungsrichtung innerhalb dieser Fehlergrenzen fällt; somit ist über Längseffekt nichts sicheres auszusagen.

Die für die beiden Kupfersorten gefundenen Resultate weichen von denjenigen ab, die Tomlinson[1] für Kupferdrähte gefunden hat. Er fand nämlich, daß die Leitfähigkeit in der Dehnungsrichtung immer verkleinert wird; anfangs ist die Abnahme stark, dann nimmt sie allmählig ab, um erst bei zirka 18 % Dehnung sich dem ursprünglichen Wert zu nähern. Meine Messungen ergaben eine Zunahme bei gewöhnlichem Kupfer und einen unsicheren Effekt bei elektrolytischem Kupfer. Die Verhältnisse in beiden Untersuchungen waren aber verschiedene, insofern hier dicke Platten, dort dünne Drähte verwendet waren. Aus den Beobachtungen von

[1] Tomlinson, l. c.

Pine[1] ergibt sich, daß schon die Dicke der Drähte von Einfluß auf die Änderung des Widerstandes ist. Seine Ergebnisse lassen sich aber hier nicht zum Vergleich heranziehen, da die von ihm benutzte Deformation eine Superposition der temporären und permanenten ist, denn er geht mit der Belastung über die Elastizitätsgrenze hinaus, beobachtet aber im belasteten Zustande.

Wie die Resultate, die ich mit Zinn gewonnen habe, beweisen (s. unten), kann auch die chemische Zusammensetzung stark auf das Verhalten des Metalls wirken ; dieser Umstand erschwert noch mehr den Vergleich der Resultate von verschiedenen Forschern.

3. Zink.

Das Zinkblech wurde geglüht und dann belastet ; es ertrug eine Dehnung von nur 4 %, bei weiterer Dehnung zerriß es ganz plötzlich. Die etwas weiter von der Bruchstelle gelegene Gegend war doch gleichmäßig gedehnt und dieser Teil wurde für die Messung benutzt.

Die Dichte war vor der Dehnung :

$$\delta_u = 7{,}177$$

nach der Dehnung :

$$\delta_g = 7{,}162 \quad .$$

Es ist also eine Dichteabnahme von 0,2 % eingetreten.

Die Stäbchen gehörten zu den ganz dünnen ; die Übereinstimmung der Messungen ist aber eine ziemlich gute ; sie sind in der Tafel III zusammengestellt.

[1] Pine, l. c.

Tafel III.

Dehnung 4 % Zink

N°	l mm	m mgr.	δ	Q qmm.	r/r₀	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_0}}$	Mittel	$\frac{\lambda}{\lambda_u} \cdot 100$
U_1	72,91	133,60		0,2553	0,8396	4,665		
U_2	72,51	117,27	7,177	0,2254	0,9512	4,665	4,651	**100,0**
U_3	72,75	119,13		0,2282	0,9480	4,623		
L_1	82,35	135,36		0,2295	0,9284	4,693		
L_2	82,15	144,22		0,2451	0,8731	4,673	4,700	**101,1**
L_3	82,32	146,45		0,2484	0,8506	4,733		
			7,162					
Q_1	71,01	124,50		0,2448	0,8682	4,705		
Q_2	71,05	129,59		0,2547	0,8357	4,720	4,704	**101,1**
Q_3	71,07	119,61		0,2350	0,9079	4,687		

Längs Zunahme 1,1 %
Quer Zunahme 1,1 %

$$\left[\frac{\lambda_L}{\lambda_Q} 100\right]_{el.} = 100{,}0$$

4. Nickel.

Nach einem mißlungenen Versuch, eine gleichmäßige Platte von den verlangten Dimensionen aus Nickel zu gießen, lieferten mir die Deutschen Nickelwerke in Schwert das Metall in Form eines gewalzten und nachher ausgeglühten Blechs. Die noch sichtbaren Walzenspuren ließen erkennen, daß das Blech in seiner Breitenrichtung gewalzt war, also quer zu der Richtung der nachherigen Belastung. Um die etwaigen Spuren der Anisotropie aufzufinden, die durch das Walzen erzeugt, durch Glühen nicht vollständig aufgehoben waren, wurden aus dem ungedehnten Metall zwei Gruppen von

Stäbchen herausgeschnitten ; die einen in der Längs-, die anderen in der Querrichtung.

Sie wurden mit L^u und Q^u bezeichnet dementsprechend die gedehnten mit L^g, Q^g, S^g.

In der Tat zeigt sich ein Unterschied im spezifischen Widerstande beider Sorten ; er war größer in der Querrichtung, also in der Richtung des Walzens um 0,26 %.

Jetzt wurde die Platte, die vorher noch auf 3 $^{m}/_{m}$ Dicke abgedreht war, gedehnt, wozu besonders starke Fassungen und Stahlnieten benutzt wurden. Wie die Resultate der Messungen zeigen (Tafel IV), zeigte sich eine schwache Widerstandszunahme in der Dehnungsrichtung, die aber nicht sicher festzustellen war, weil die Werte der beiden Sorten ineinanderspielen. In der Querrichtung zeigt sich kein merklicher Effekt ; die schrägen Stäbchen ergeben einen Wert, der genau mit dem Mittelwerte aus den beiden anderen übereinstimmt

Tomlinson findet für Nickeldraht, daß er bei Dehnung seinen Widerstand zuerst etwas vermindert, dann kommt bei 2 % Dehnung ein rascher Anstieg, und von da ab steigt der Widerstand nur sehr langsam ; es ist möglich, daß sich das gewalzte Blech gerade im Bereiche der langsamen Abnahme des Leitvermögens befand, in welchem nur sehr kleine Änderungen in der Dehnungsrichtung zum Vorschein kamen.

Diese geringen Effekte ließen nicht erwarten, bessere Resultate mit Nickel zu bekommen ; deshalb wurde von weiteren Versuchen abgesehen.

Die Dichte vor und nach der Dehnung war :

$$\delta_u = 8{,}872 \qquad \delta_g = 8{,}868.$$

Der Unterschied liegt innerhalb der Fehlergrenze ; deshalb war der Mittelwert

$$\delta = 8{,}870$$

angenommen.

Tafel IV.

Dehnung 4,7 %

Nickel

N°	l mm.	m gr.	δ	Q qmm.	r/r_o	ϑ°	$\frac{100}{Q \cdot \frac{r}{r_o}}$	Mittel	$100\,\frac{\lambda}{\lambda_u}$
L_1^u	86,98	9,0066		11,674	1,0080	20°4	84,98		
L_2^u	87,16	9,1997		11,900	0,9838	21°8	85,42	85,20	**100,00**
L_1^g	87,23	9,1894		11,875	0,9948	20°7	84,65		
L_2^g	87,14	9,1832		11,881	0,9891	22°8	85,10	84,98	**99,74**
L_3^g	87,20	9,2115		11,910	0,9855	21°6	85,20		
Q_1^u	85,84	8,9338	8,870	11,734	1,0042	21°2	84,87		
Q_2^u	85,15	8,4564		11,196	1,0578	21°6	84,43	84,65	**99,35**
Q_1^g	85,07	8,9684		11,886	0,9927	22°9	84,76		
Q_2^g	85,01	8,9454		11,864	0,9980	22°6	84,46	84,61	**99,31**
S_1^g	86,87	9,1477		11,872	0,9904	20°4	85,05		
S_2^g	86,91	9,1391		11,856	0,9974	21°8	84,57	84,81	**99,54**

Längs Abnahme 0,3 %

Quer kein beobachtbarer Effekt.

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 100{,}4$$

5. Kadmium.

Zwei in gewünschter Form gegossene Kadmiumplatten erhielt ich von der Firma Kahlbaum, Berlin. Infolge der Schwierigkeiten des Gusses sind beide mangelhaft ausgefallen. Die eine war vollständig unbrauchbar, die andere sah einigermaßen gut aus und ließ sich bis auf 4 % Dehnung ziehen, aber auch ihre Oberfläche war mit Sprüngen und Luftbläschen besät, und nur ein kleiner Teil konnte für die Untersuchung gebraucht werden, der gerade ausreichte, um die längs- und quergedehnten Stäbchen auszuschneiden; für die schrägen blieb nichts übrig. Mit jenen habe ich ziemlich gute Resultate erhalten, nur ein ungedehntes Stück zeigte einen viel zu großen Widerstand; eine nähere Untersuchung ließ auf seiner Oberfläche einen kleinen, aber merklichen Sprung entdecken. Der betreffende Wert ist bei der Mittelwertbildung nicht berücksichtigt worden.

Die Dichte war nicht besonders bestimmt; für die Berechnung der Querschnitte ist aus dem Handbuch von Kohlrausch der Wert

$$\delta = 8{,}60$$

entnommen.

Tafel V.

Dehnung 4 % — Kadmium

N°	m gr.	l mm.	δ	Q qmm.	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_0}}$	Mittel	$100\frac{\lambda}{\lambda_u}$
U_1	1,2436	82,08		1,762	1,149	0,4940[1]		
U_2	1,1645	76,76		1,764	1,131	0,5012	0,5001	**100,0**
U_3	1,0704	70,61		1,763	1,137	0,4990		
L_1	1,3936	78,37	8,60	2,068	1,011	0,4784	0,4805	**96,1**
L_2	1,4024	79,87		2,042	1,015	0,4825		
Q_1	1,1591	75,75		1,779	1,128	0,4983	0,4965	**99,3**
Q_2	0,9525	62,25		1,779	1,136	0,4947		

Längs Abnahme 3,9 %
Quer Abnahme 0,7 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 96{,}7$$

6. Zinn.

Zinn wurde in den gewünschten Dimensionen gegossen. Die ersten Messungen, bei welchen kleine Querschnitte von 0,25 q^{mm} gebraucht wurden, blieben erfolglos ; die Abweichungen betrugen einige Prozente. Wie weitere Versuche zeigten, waren die Deformationen, die die dünnen biegsamen Stäbchen bei der Bearbeitung erlitten, daran Schuld. Weiter wurde nur mit größeren, 7,5 q^{mm} betragenden Querschnitten gearbeitet. Zuerst wurden zwei Serien von Versuchen ausgeführt, bei 1,5% und bei 5 % Dehnung, die in den Tafeln VI und VII zusammengestellt sind.

[1] Der Stab U_1 hatte einen merklichen Sprung. (s. o.)

Tafel VI.

Dehnung 1,5 %								Reines Zinn
N°	l mm.	m gr.	δ	Q mm².	$\frac{r}{r_o}$	$\frac{1}{Q.\frac{r}{r_o}}$	Mittel	$\frac{\lambda}{\lambda_u}.100$
U_1	89,10	4,7311	7,301	7,274	0,999	0,1376	0,1366	**100,0**
U_2	89,40	4,8468		7,427	0,993	0,1356		
L_1	92,07	4,8253		7,180	1,022	0,1363		
L_2	91,50	4,9651		7,434	0,997	0,1349	0,1354	**99,1**
L_3	93,14	5,0207		7,383	1,003	0,1351		
Q_1	90,90	4,9253	7,298	7,423	1,058	0,1273		
Q_2	89,35	4,8312		7,407	1,086	0,1243	0,1256	**92,0**
Q_3	89,73	4,8703		7,436	1,075	0,1251		
S_1	95,13	5,0056		7,208	1,053	0,1318	0,1326	**97,1**
S_2	90,44	4,8526		7,350	1,021	0,1333		

Längs Abnahme 0,9 %
Quer Abnahme 8,0 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 107{,}8$$

Die Übereinstimmung der einzelnen Werte miteinander läßt in erster Serie noch viel zu wünschen übrig, die Resultate zeigen aber, daß schon eine kleine Deformation beträchtliche Änderungen hervorrufen kann, und da die Zinnstäbchen trotz ihres ziemlich großen Querschnittes sehr biegsam waren, so suchte ich den Grund der mangelhaften Übereinstimmung in den bei der Bearbeitung eingetretenen Deformationen. Um dies zu prüfen, bog ich etwas ein schon gemessenes Stäbchen, streckte es wieder gerade und maß zum zweiten Male ; der Widerstand des Stäbchens ist dabei um 4 %

gewachsen. Bei der zweiten Serie wurde viel Sorgfalt darauf angewandt, die Deformation zu vermeiden, und in der Tat sind die Resultate dieser Reihe besser als die der ersten, und die längsgestreckten ausgenommen, zeigen sie recht gute Übereinstimmung.

Tafel VII.

Dehnung 5 % Reines Zinn

N°	l mm.	m gr.	δ	Q mm².	r/r₀	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_0}}$	Mittel	$\frac{\lambda}{\lambda_u} \cdot 100$
U_1	92,50	4,9385	7,301	7,314	0,911	0,1501	0,1501	**100,0**
U_2	92,79	5,0191		7,410	0,899	0,1501		
L_1	89,76	4,8427		7,391	1,010	0,1340		
L_2	89,92	4,8407		7,375	1,006	0,1348	0,1341	**89,3**
L_3	89,72	4,8490		7,403	1,012	0,1335		
Q_1	88,67	4,8015		7,419	1,020	0,1321		
Q_2	83,85	4,5239	7,298	7,391	1,027	0,1317	0,1319	**87,9**
Q_3	84,08	4,4838		7,305	1,037	0,1320		
S_1	89,76	4,7977		7,322	1,023	0,1335		
S_2	89,81	4,7847		7,298	1,026	0,1336	0,1334	**88,9**
S_3	85,47	4,5122		7,232	1,039	0,1331		

Längs Abnahme 10,7 %
Quer Abnahme 12,1 %

$$\left[100 \frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 101{,}7$$

Die Größe der Effekte, die alle anderen von mir beobachteten beträchtlich überragt, läßt sogar die großen Abweichungen der ersten Reihe wenig empfinden; nur die Leitfähigkeit der schrägen Stäbchen weicht ziemlich stark ab von dem Mittelwerte aus den längs- und quergestreckten. In der zweiten Reihe ist

die Abweichung ebenfalls ziemlich groß und zwar in demselben Sinne.

Die Dichte wurde für jede Platte vor und nach der Dehnung bestimmt. Es war

Platte I	$\delta_u = 7{,}303$	$\delta_g = 7{,}298$
» II	$\delta_u = 7{,}299$	$\delta_g = 7{,}298$

Der Mittelwert

$$\delta_u = 7{,}301 \qquad \delta_g = 7{,}298$$

wurde für beide genommen.

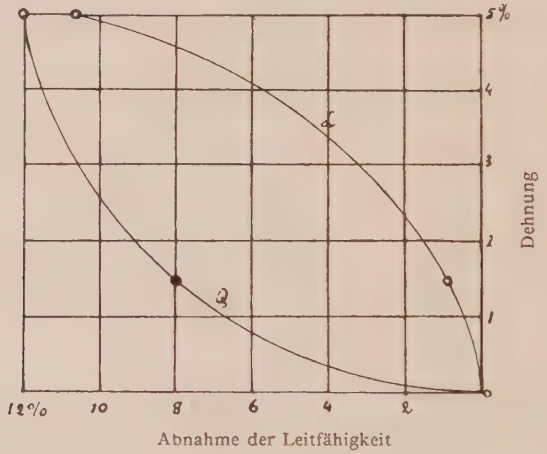

Fig. 6.

Diese beiden Platten waren aus demselben Guß.

Um den Verlauf der Widerstandsänderung besser kennen zu lernen, ließ ich eine neue Platte gießen, die auf 2,7 % gedehnt wurde ; die Effekte waren ganz verschieden von denen, die auf Grund der zwei ersten Reihen zu erwarten waren ; wie die Figur 6 zeigt, ließ sich eine Abnahme der beiden Leitfähigkeiten

Tafel VIII.

Dehnung 2,7 % Unreines Zinn

N°	l mm.	m gr.	δ	Q qmm.	r/r₀	ϑ°	$\frac{100}{Q.\frac{r}{r_0}}$	Mittel	$100\frac{\lambda}{\lambda_u}$
U_1	82,90	7,2134		11,920	1,0270	16°8	8,169	8,181	**100,0**
U_2	82,79	7,2701		12,029	1,0149	19°8	8,192		
L_1	80,57	6,9242		11,773	1,0258	20°9	8,281	8,283	**101,3**
L_2	82,83	7,1689		11,859	1,0181	19°5	8,285		
Q_1	82,76	7,2533	7,300	12,007	0,9914	18°8	8,402		
Q_2	82,71	7,2338		11,981	0,9964	19°4	8,378	8,389	**102,5**
Q_3	82,77	7,2083		11,931	0,9995	19°9	8,387		
S_1	82,67	7,1631		11,871	1,0066	18°2	8,370		
S_2	82,81	7,1732		11,868	1,0100	18°9	8,345	8,353	**102,1**
S_3	82,87	7,1938		11,893	1,0067	20°2	8,354		

Längs Zunahme 1,3 %
Quer Zunahme 2,5 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 98{,}8$$

um einige Prozente erwarten ; die Messungen ergaben dagegen eine deutliche Zunahme in beiden Richtungen. Außerdem war jetzt die Leitfähigkeit besser in der Querrichtung, in den beiden ersten Serien war es die in der Längsrichtung. Dieses Resultat ließ mich vermuten, daß hier die Unterschiede in der Zusammensetzung von Einfluß waren und ich ließ die Metalle chemisch analysieren. Dabei ergab sich folgendes : Das Material der zwei ersten Platten war in 98,96 % reines Zinn ; der Rest bestand in der Hauptsache aus suspendierter Kohle. Das der dritten Platte hatte nur 97,64 % reinen Zinn ; im Rest waren außer Kohle noch Eisen und Spuren von Blei vorhanden. Da sich die Kohle in beiden Proben befand, so ist der Unterschied des Verhaltens plausibler Weise auf die metallischen Verunreinigungen zurückzuführen.

Sonst waren keine Unterschiede in der Behandlung der Platten zu konstatieren, so daß man daraus schließen kann, daß auch kleine Zusätze fremder Metalle das Verhalten des Metalls beim Dehnen stark beeinflussen können.

Die Richtung dieses Einflusses ist dieselbe wie die des starken Zusatzes von Kadmium zu Zinn.

7. Zinn- Kadmium-Legierung.

Von mehreren Zinnlegierungen, die ich für meine Untersuchungen zu verwenden versucht habe, zeigte sich nur die mit Kadmium als dafür geeignet, obwohl auch bei ihr beträchtliche Schwierigkeiten auftraten, falls man allen Forderungen zu genügen suchte ; von mehrere Platten, die gegossen und gedehnt wurden, waren nur drei zu verwenden, deren Dehnung 0,6 %, 1,5 % und 4,7 % betrug. Weitere Bemühungen, eine

Tafel IX.

Dehnung 0,6 %

Zinn-Kadmium

N°	l mm.	m gr.	δ	Q qmm.	r/r₀	θ	$\frac{1}{Q.\frac{r}{r_0}}$	Mittel	$100\frac{\lambda}{\lambda_u}$
U_1	83,12	5,4768		8,888	0,9591	20°4	0,1173		
U_2	83,02	5,4079		8,787	0,9770	20°3	0,1165	0,1168	**100,0**
U_3	82,62	5,3259		8,696	0,9874	19°0	0,1165		
L_1	83,14	5,3239		8,638	0,9889	17°2	0,1171		
L_2	83,09	5,3647		8,710	0,9761	18°1	0,1176	0,1176	**100,7**
L_3	83,19	5,3240		8,633	0,9807	18°9	0,1181		
			7,413						
Q_1	82,72	5,4229		8,843	0,9597	18°6	0,1178		
Q_2	82,83	5,1362		8,365	1,0078	19°5	0,1186	0,1181	**101.1**
Q_3	82,87	5,3686		8,739	0,9698	17°5	0,1180		
S_1	83,11	5,3760		8,726	0,9816	18°0	0,1168		
S_2	82,88	5,2665		8,572	0,9951	18°7	0,1172	0,1171	**100,3**
S_3	82,79	5,3913		8,784	0,9703	18°3	0,1173		

Längs Zunahme 0,7 %
Quer Zunahme 1,1 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 99{,}6$$

neue Platte von ungefähr 3 % Dehnung zu erhalten. blieben ergebnislos ; schon viel früher zerrissen die Platten an anscheinend unhomogenen Stellen.

Die prozentuale Zusammensetzung der Legierung war : 90 % Zinn und 10 % Kadmium.

Tafel X.

Dehnung 1,5 % Zinn-Kadmium

N°	l mm.	m gr.	δ	Q qmm.	r/r₀	$\frac{1}{Q.\frac{r}{r_0}}$	Mittel	$100\,\frac{\lambda}{\lambda_u}$
U_1	90,71	3,1962		4,753	1,034	0,2035		
U_2	90,56	3,1920		4,755	1,026	0,2050	0,2044	**100,0**
U_3	91,52	3,2387		4,774	1,023	0,2048		
L_1	94,14	3,3329		4,775	0,981	0,2135		
L_2	94,11	3,2281		4,626	1,011	0,2138	0,2136	**104,5**
L_3	94,15	3,3386		4,783	0,979	0,2136		
			7,413					
Q_1	95,08	3,4233		4,856	0,979	0,2103		
Q_2	95,06	3,3512		4,755	0,998	0,2110	0,2104	**102,9**
Q_3	94,78	3,2717		4,656	1,022	0,2102		
S_1	92,63	3,2710		4,763	0,986	0,2129		
S_2	92,59	3,2170		4,686	1,013	0,2107	0,2119	**103,7**
S_3	92,65	3,1548		4,593	1,026	0,2122		

Längs Zunahme 4,5 %
Quer Zunahme 2,9 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 101{,}5$$

Tafel XI.

Dehnung 4,7 % — Zinn-Kadmium

N°	l mm.	m gr.	δ	Q qmm.	r/r₀	$\frac{1}{Q \cdot \frac{r}{r_0}}$	Mittel	$100\frac{\lambda}{\lambda_u}$
U_1	83,37	3,0217	7,413	4,889	0,9953	0,2055		
U_2	83,84	3,0680		4,936	0,9799	0,2067	0,2053	**100,0**
U_3	83,92	2,9428		4,730	1,0373	0,2038		
L_1	96,94	3,4124		4,762	0,9726	0,2159	0,2154	**104,9**
L_2	96,77	3,4145		4,773	0,9753	0,2148		
Q_1	86,60	3,1326	7,392	4,894	0,9884	0,2068		
Q_2	86,53	3,1551		4,933	0,9837	0,2061	0,2067	**100,7**
Q_3	87,35	3,0527		4,728	1,0215	0,2071		
S_1	83,13	3,0076		4,894	0,9789	0,2087		
S_2	79,59	2,7425		4,662	1,0067	0,2131	0,2110	**102,8**
S_3	83,19	2,8083		4,567	1,0369	0,2112		

Längs Zunahme 4,9 %
Quer Zunahme 0,7 %

$$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{el.} = 104{,}2$$

Die Dichte blieb bei kleinerer Dehnung ungeändert; bei stärkerer Deformation war eine Abnahme um 0,3 % bemerkbar. Die entsprechenden Zahlen waren:

Platte I $\delta_u = 7{,}413$ $\delta_g = 7{,}412$
» II $\delta_u = 7{,}414$ $\delta_g = 7{,}413$
» III $\delta_u = 7{,}412$ $\delta_g = 7{,}392$.

Die Resultate der Messung sind in Fig. 7 aufgetragen und mit Kurven verbunden, die ungefähr den Verlauf der Leitfähigkeitsänderungen in den beiden Hauptrichtungen darstellen sollen.

In den Zahlen für die erste Platte (Tafel IX) liegt der Mittelwert für die unter 45° gedehnten Stäbchen jenseits der Mittelwerte für die Hauptrichtungen, was vielleicht auf eine ungleichmäßige Dehnung zurückzuführen ist, was bei dem sehr kleinen Betrage derselben

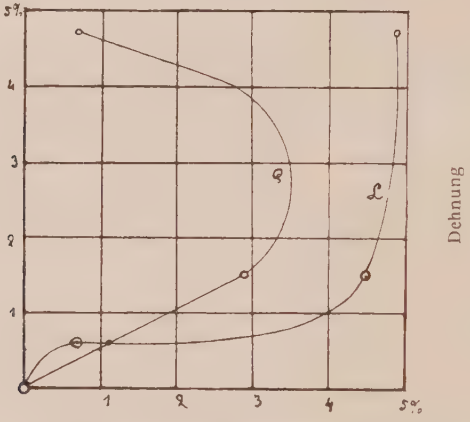

Fig. 7.

leicht entgehen konnte. Der rasche Anstieg der beiden Leitfähigkeiten in den beiden Richtungen an dieser Stelle macht diese Vermutung plausibel.

8. Zusammenstellung der Resultate.

In der Tafel XII sind die Resultate der elektrischen Messungen zusammengestellt ; in dieser bedeuten : D die Stärke der Dehnung, λ_u, λ_L, und λ_Q, die Leitfähigkeiten im ungedehnten bzw. im gedehnten Zustande : längs und quer zu der Dehnungsrichtung.

Die Zahlen erlauben nur wenige allgemeine Schlüsse zu ziehen. Jedes Metall verhält sich ganz individuell, und auch bei denen, die bei mehr als einer Dehnung

untersucht waren, herrscht keine einfache Abhängigkeit zwischen dem Betrage der Dehnung und der Änderung der Leitfähigkeit.

Die einzige Regelmäßigkeit, die zu entdecken war, die aber auch nicht ohne, wenigstens scheinbare, Ausnahme gilt, ist die, daß die Änderung des spezifischen Widerstandes in den beiden Hauptrichtungen den gleichen Sinn hat, ein Resultat, das der Regel von Tomlinson gerade widerspricht. Die erwähnte Ausnahme bildet das elektrolytische Kupfer, aber, wie schon oben ausführlich dargelegt wurde, darf man in diesem Falle dem Resultate keine unbedingte Richtigkeit beimessen, da der Längseffekt nicht sicher genug festzustellen war. Sieht man also von diesem Falle ab, so kommt man zu folgenden Resultaten:

a) eine permanente Dehnung beeinflußt die elektrische Leitfähigkeit der Metalle sowohl in der Richtung der Deformation, wie auch in einer dazu senkrechten Richtung;

b) die Beträge und der Sinn der Änderungen wechseln von Fall zu Fall, aber für jedes Metall ist der Sinn der Änderungen in beiden Richtungen derselbe.

Ein weiterer wichtiger Schluß, den man aus den angegebenen Resultaten ziehen kann, ist der, daß eine Legierung (Zinn-Kadmium) sich entgegengesetzt verhalten kann, wie die beiden komponierenden Metalle, und daß sogar kleine metallische Verunreinigungen einen so großen Einfluß auf das Verhalten des Metalls haben können, daß dadurch nicht nur die Größe, sondern auch der Sinn des Effektes verändert werden kann (reines und unreines Zinn).

Tafel XII.

Metall	D	$100\frac{\lambda_L}{\lambda_u}$	$100\frac{\lambda_Q}{\lambda_u}$	$100\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}$
Käufliches Kupfer .	10,5 %	100,9	102,5	98,4
Elektrolytisch. Kupfer	5 %	100,3 (?)	99,2	101,1
Zink	4 %	101,1	101,1	100,0
Nickel	4,7 %	99,7 (?)	100,0	100,4
Zinn, rein	1,5 %	99,1	92,0	107,8
» »	5 %	89,3	87,9	101,7
Zinn, unrein	2,7 %	101,3	102,5	98,8
Kadmium	4 %	96,1	99,3	96,7
Zinn-Kadmium . . .	0,6 %	100,7	101,1	99,6
» » . . .	1,5 %	104,5	102,9	101,5
» » . . .	4,7 %	104,9	100,7	104,2

III.

Untersuchung der Wärmeleitungsfähigkeit.

A. Vergleichung der Hauptleitungsfähigkeiten im gedehnten Metalle. Meßmethode.

Um das Franz-Wiedemann'sche Gesetz für den Fall der permanent gedehnten Metalle zu prüfen, wurde auch die Wärmeleitung der untersuchten Metalle gemessen. Zuerst wurden die Leitfähigkeiten in den beiden Hauptrichtungen des schon gedehnten Metalls miteinander verglichen.

Die Methode war die von de Sénarmont[1] für die Krystalle angegebene, deren Theorie unter anderen von Stokes[2] gegeben wurde. Die Ergebnisse, zu welchen der letztere gelangt, lassen sich so zusammenfassen:

Nimmt man an, daß der Rotationskoeffizient der Wärmeströmung verschwindet, daß also die Strömungsgleichungen in der Form geschrieben werden können:

$$u = -A\frac{d\vartheta}{dx} \qquad v = -B\frac{d\vartheta}{dy} \qquad w = -C\frac{d\vartheta}{dz}$$

wobei x, y, z mit den Krystallachsen zusammenfallen, u, v, w die Strömungskomponenten, ϑ die Temperatur,

[1] de Sénarmont. Ann. de Ch. et Phys. XXI, XXII, XXIII. 1850.

[2] Stokes. The Cambr. a. Dubl. mathem. Journal VI. 1851.

und A, B, C die Leitfähigkeiten in den Achsenrichtungen bedeuten, so werden die Isothermenflächen im Falle einer punktförmigen Wärmequelle zu konzentrischen, ähnlichen Ellipsoiden, deren Hauptachsen a, b, c durch das Verhältnis bestimmt sind:

$$a : b : c = \sqrt{A} : \sqrt{B} : \sqrt{C} \qquad (7)$$

und deren Mittelpunkt in der Wärmequelle liegt.

Schneidet man eine sehr dünne und unendlich große Platte parallel zu einer der Hauptebenen, so bilden die Isothermen konzentrische Ellipsen, mit entsprechendem Achsenverhältnis.

Begrenzt man die Platte, so gilt für die Randkurve die Bedingung:

$$\lambda \frac{d\vartheta}{dn} = \overline{\lambda} \left(\overline{\vartheta} - \vartheta_u \right) \qquad (8)$$

wo n die innere Normale der Kurve, $\overline{\lambda}$ die Oberflächenleitung, $\overline{\vartheta}$ die Randtemperatur, ϑ_u die Temperatur der Umgebung ist.

Unterscheiden sich die beiden Hauptleitvermögen nur wenig voneinander, so sind auch die Isothermenellipsen nur wenig von Kreisen verschieden; folglich ist $\frac{d\vartheta}{dn}$ längs einer solchen Kurve beinahe konstant. Daraus folgt, daß, wenn die Platte längs einer Isotherme geschnitten ist, diese der Randbedingung annähernd genügt; sie hört also nicht auf, eine Isotherme zu sein. Sind die beiden Bedingungen erfüllt, so nehmen die Isothermen in der begrenzten Platte dieselbe Gestalt an, als wenn sie unendlich ausgebreitet wäre. Sind aber die Unterschiede der Leitfähigkeiten, also auch die Exzentrizitäten der Ellipsen groß, so ist $\frac{d\vartheta}{dn}$ längs einer Isotherme nicht mehr konstant, und der Rand kann auf

die letztere deformierend wirken. Dieser Einfluß wird um so größer sein, je näher an den Rand die Isothermen kommen.

Unter der Annahme, daß sich eine gedehnte Metallplatte wie ein Krystall mit einer ausgezeichneten Achse verhält, die in die Dehnungsrichtung fällt, und daß der Rotationskoeffizient auch in diesem Falle verschwindet, kann man die Stokes'sche Theorie auch auf unseren Fall anwenden.

Elie[1] hat den Fall der elektrischen Leitung auch für den Fall, daß der Rotationskoeffizient nicht verschwindet, theoretisch untersucht; die Gleichungen nehmen dann eine allgemeinere, zuerst von Maxwell gegebene Gestalt an:

$$u = A \frac{dV}{dx} + F_1 \frac{dV}{dy} + E_2 \frac{dV}{dz}$$

$$v = F_2 \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} + D_1 \frac{dV}{dz}$$

$$w = E_1 \frac{dV}{dx} + D_2 \frac{dV}{dy} + C \frac{dV}{dz}$$

Für einen flächenhaften Leiter gelten die Gleichungen:

$$u = A \frac{dV}{dx} + C_1 \frac{dV}{dy}$$

$$v = C_2 \frac{dV}{dx} + B \frac{dV}{dy} \qquad (9)$$

Für ein Koordinatenachsensystem x'y', das dadurch ausgezeichnet ist, daß für dieses

$$C'_1 = - C'_2$$

[1] Elie. Journ. de Ph. VI (2). 1887. — La lum. el. XXIII. 1887., S. 51 und 201.

ist, lautet die Lösung dieser Differentialgleichungen :

$$V = M.\log. \sqrt{\frac{(x' - x'_1)^2}{A} + \frac{(y' - y'_1)^2}{B}}$$

und die Äquipotentiallinien sind Ellipsen mit der Gleichung :

$$\frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} = N$$

also auch hier ist das Hauptachsenverhältnis :

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad . \tag{10}$$

Diese Hauptachsen brauchen im allgemeinen nicht mit den Richtungen, die durch andere physikalische Eigenschaften ausgezeichnet sind, und die wir mit x, y bezeichnet haben, zusammenzufallen. Wenn das aber der Fall ist, so bedeutet dies, daß

$$C_1 = C_2$$

ist, wobei diese Koeffizienten gleich Null oder von Null verschieden sein können.

Diese Resultate können mutatis mutandis auf die Wärmeleitung angewandt werden, da für diese dieselben Differentialgleichungen gelten.

Die experimentelle Methode von Sénarmont beruht darauf, die Isothermen, deren Zusammenhang mit den Leitfähigkeitskoeffizienten eben auseinandergesetzt wurde, sichtbar zu machen, indem er die untersuchten Krystallplatten mit einer Wachsschicht überzog, deren

Schmelzkurve eine Isotherme bildete [1]. Nach Angabe von Voigt [2] war Wachs durch die leichter schmelzbare Elaidinsäure ersetzt, der eine sehr kleine Menge Wachs zugesetzt wurde.

Die Schmelztemperatur der Mischung betrug 39°,5.

B. Bestimmung der Leitfähigkeiten.

Die Bestimmung des Leitfähigkeitsverhältnisses beruhte auf der Ausmessung der Hauptdurchmesser der ellipsenförmigen Schmelzkurven, deren Verhältnis dann der Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Hauptleitfähigkeiten gleichgesetzt wurde. Da jedoch die Kurven nicht vollkommen elliptische Gestalt hatten, sondern infolge der zufälligen Einflüsse von dieser abwichen, so war es ratsam, mehrere Durchmesser der Kurven zu messen, um einerseits beurteilen zu können, inwieweit sie sich der Ellipsengestalt nähern und die Richtung einer ihrer Hauptachsen mit der der Dehnung zusammenfällt, und anderseits, um die Hauptachsenlängen aus mehreren Messungen zu berechnen und so den Einfluß der zufälligen Unregelmäßigkeiten nach Möglichkeit zu vermeiden.

Die Durchmesser wurden in Abständen von je 30° gemessen, so daß für jede Kurve sechs Messungen vorlagen. Bedeutet a die Hauptachse, die in die Dehnungsrichtung fällt, b die andere Hauptachse und d_h den Durchmesser, der unter dem Winkel φ_h zu der ersten steht, so ist:

$$\frac{1}{d_h^2} = \frac{\cos^2 \varphi_h}{a^2} + \frac{\mathrm{Sin}^2 \varphi_h}{b^2} = A + B \cos 2\varphi$$

[1] Sénarmont dehnte seine Methode auch auf deformierte schlechte Wärmeleiter aus.

[2] Voigt. Elementare Theorie der Krystalle.

wobei :

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \qquad B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

Die Bedingung des Minimums für die Summe der Fehlerquadrate liefert :

$$A = \frac{1}{6}\sum \frac{1}{d_h^2} \qquad B = \frac{\sum \frac{1}{d_h^2}\cos 2\varphi_h}{\sum \cos^2 2\varphi_h}$$

oder, da φ_h nacheinander die Werte 0, 30°, 60°, 90°, 120° und 150° annimmt :

$$B = \frac{1}{3}\sum \frac{1}{d_h^2}\cos 2\varphi_h$$

Die Genauigkeit der Messungen bei den einzelnen Kurven war sehr verschieden, da kleine, zufällige Einflüsse sehr leicht Deformationen derselben zur Folge hatten.

Sehr wichtig war es, die Schicht der Schmelzsubstanz möglichst gleichmäßig aufzutragen. Die Isothermen schritten schnell vor sich, so daß die kleine Zeit, die nötig war, um die Substanz zu schmelzen, schon nicht zu vernachlässigen war. Das beweist z. B. der Umstand, daß merkliche Dickenunterschiede der Schicht auch ganz deutliche Deformationen der Kurven ergaben und zwar in dem Sinne, daß in den dünner überzogenen Stellen die Schmelzung weiter sich verbreitet hat als in den übrigen. Bei dem gutleitenden Kupfer, wo die Geschwindigkeit der Isothermen am größten war, war es auch wirklich besonders schwer, regelmäßige Kurven zu bekommen. Anderseits war es zu empfehlen, die Er-

wärmung schnell zu bewirken, denn nur dann war an der eben geschmolzenen Stelle das Temperaturgefälle groß genug, um beim Erstarren eine genügend scharfe Kurve entstehen zu lassen. Das Temperaturgefälle nimmt ab, wenn man sich dem Rande nähert, und das war die Ursache davon, daß je größer um so verwaschener die Ellipsen waren, so daß man über 0,5 bis 0,6 des Durchmessers der zur Messung benutzten Kreisplatten nicht hinausgehen konnte. Auch die mittleren Fehler der Messungen wachsen in der Regel mit den Dimensionen der Kurve.

Die letzten waren aus den hervorgehobenen Gründen sehr verschieden. Sie waren nach der Formel berechnet:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{m-n}} = \frac{\sqrt{\Sigma\delta^2}}{2}$$

wo δ die Fehler der einzelnen Messung bedeuten, $n=2$ die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten, $m=6$ die Anzahl der Einzelmessungen ist. Sie schwankten zwischen 0,01 $^{m}/_{m}$ und 0,3 $^{m}/_{m}$; ihr Verhältnis zum Durchmesser der Ellipse betrug 0,1 % bis 1,3 %.

Das in der angedeuteten Weise berechnete Verhältnis der Hauptdurchmesser war keineswegs konstant für eine und dieselbe Platte; es schwankte ziemlich stark, ohne daß ich einen Grund dieser Abweichungen angeben könnte. Es ist bei einigen Platten eine Neigung der Ellipsen zu beobachten, ihre Exzentrizitäten mit wachsendem Durchmesser zu vergrößern; teilweise ist diese Neigung dadurch zu erklären, daß die Wärmequelle keine punktförmige war, aber die Gestalt einer 1,6 $^{m}/_{m}$ weiteren Kreisöffnung hatte, die somit eine Isotherme darstellte; dieser Umstand kann für die ganz kleinen Isothermen ins Gewicht fallen, da aber die

genannte Neigung auch bei verhältnismäßig großen Durchmessern noch bestand, so ist diese Erklärungsweise nicht genügend.

Bei der einen Zinn-Kadmium-Platte, mit welcher ich ziemlich große Kurven erhalten habe, fängt die Exzentrizität, wenn man sich den Rändern nähert, wieder an etwas abzunehmen, was auf die Verschwommenheit der Kurven und vielleicht auch auf die Randwirkung der Platte zurückzuführen ist [1].

Der Mittelwert des Achsenverhältnisses $\frac{a}{b}$ diente zur Berechnung des Verhältnisses der Leitfähigkeiten.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left[\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{\text{term.}}$$

Diese Ausdrücke konnten mit den entsprechenden Größen für die elektrische Leitfähigkeit direkt verglichen werden.

C. Das Material.

Als Material dienten die Reststücke der Platten, die für die elektrische Untersuchung verwendet waren; das garantierte dieselbe Zusammensetzung und Dehnung des Metalls für beide Untersuchungsreihen.

Die Ausdehnung der Messung auf die Wärmeleitung wurde mir von Prof. Voigt erst dann vorgeschlagen, als ein Teil der elektrischen Messungen schon fertig vorlag und die Plattenreste nicht mehr zu haben waren; deshalb ist diese Untersuchung nur für einige Metalle durchgeführt.

[1] Vgl. Tafel XIII und XIV.

Für Isothermen mit kleiner Exzentrizität gilt die Theorie sehr annähernd noch dann, wenn die Platte nicht unbegrenzt, sondern längs einer Isotherme ausgeschnitten ist ; in diesem Falle unterscheiden sich aber die letzteren auch nicht sehr stark von einem Kreise, und so waren die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Theorie wenigstens annähernd erfüllt, wenn die Platten kreisrunde Form bekamen, um so mehr, als die Schmelzkurven nur bis zur Hälfte des Plattenradius reichten, also vom Rande und dessen Wirkung genügend entfernt waren.

Bei Zinn sind die Ellipsen stark abgeplattet ; nur bei diesem Metall konnte also die Randwirkung von merklichem Einfluß auf die Isothermenverbreitung sein.

Die Durchmesser der Platten waren so groß genommen, als es nur das zur Verfügung stehende Material zuließ.

Um den Einfluß der Dicke zu bestimmen, waren mit einer Platte zwei Reihen von Messungen vorgenommen, einmal bei einer Dicke von 4 $^{m}/_{m}$, und dann nach Abdrehung bis auf 1 $^{m}/_{m}$. Wie die dazu gehörigen Tafeln XIII und XIV zeigen, waren die Mittelwerte aus beiden Reihen und auch die mittleren Fehler der einzelnen Messungen und der Mittelwertbildung beinahe dieselben. Der Einfluß der Dicke war also in den genannten Grenzen nicht festzustellen. Bei kleinerer Dicke schienen jedoch die Isothermen schärfer zu sein und die Messung bequemer zu machen ; deshalb wurden auch andere Platten auf die Dicke von 1 $^{m}/_{m}$ oder 1,5 $^{m}/_{m}$ abgedreht. Weiter in der Verminderung der Dicke zu gehen, war nicht leicht möglich, da das weiche Material sich nicht dünner abdrehen ließ.

Nach Abdrehen waren die Platten auf beiden Seiten matt poliert, um die Oberflächenleitung auf ihrer ganzen

Fläche gleichmäßig zu machen, dann mit einer dünnen Schicht sehr verdünnter Firnißlösung bestrichen, leise erwärmt und schließlich mit Elaidinsäureschicht überzogen. Der Firniß bezweckte, die Tropfenbildung der letzteren zu verhüten, die immer eintrat, wenn die geschmolzene Elaidinsäure auf blanke Metallfläche kam. — War die Schicht erstarrt, was durch Auflegen auf eine größere Kupferplatte geschah, so konnte die Platte zum Versuch gebraucht werden.

D. Ausführung der Messungen.

Für die Wärmezufuhr diente ein 5 $^{m}/_{m}$ dicker Kupferdraht, dessen eines Ende sich zuerst konisch etwas zuspitzte und dann in eine cylindrische Spindel von 1,5 $^{m}/_{m}$ Durchmesser und 5 $^{m}/_{m}$ Länge auslief. Dem anderen Ende nahe war eine dünne quadratische Kupferplatte von 5 $^{c}/_{m}$ Seitenlänge angeschraubt, so daß der Draht entlang ihrer Mittellinie lief. Der Draht wurde durch ein Gestell in einer etwas gegen den Horizont geneigten Lage gehalten, das zugespitzte Ende nach oben.

Die zu untersuchende Platte war in ihrer Mitte mit einer kreisrunden Öffnung versehen, die auf die Spindel des Erwärmungsdrahtes lose genug paßte, um eine Drehung der Platte zu gestatten. Zwischen ihr und der quatratischen Kupferplatte befanden sich zwei mit Öffnungen zum Durchstecken des Drahtes versehene Schirme, der eine aus Abest, der andere, größere, aus Karton, die die Platte von der heißen Luft der Erwärmungsflamme und von direkter Strahlung der heißen Teile schützen sollten.

Nachdem die Untersuchungsplatte auf die Spindel gesetzt, und eine Weile gewartet war, um sie die Temperatur der Umgebung annehmen und etwaige innere Tempe-

raturunterschiede ausgleichen zu lassen, wurde die Kupferplatte mit einer Bunsenflamme energisch erhitzt, und gleichzeitig die untersuchte Platte mit behandschuhter Hand in gleichmäßige Drehbewegung versetzt, um den Wärmeübergang von der Spindel in die Platte nach allen Richtungen hin gleichmäßig zu machen.

Bald zeigte sich die Schmelzkurve und nachdem sie die gewünschte Größe erreicht hatte, wurde das spitze Ende des Drahtes gesenkt und die Platte rasch gedreht, bis sie von der Spindel herunterrutschte und auf eine hohle Unterlage fiel, die ihre Schicht vor Verletzen schützte. — Nach langsam erfolgter Erstarrung wurde die gebildete Isotherme der Messung unterzogen. Diese geschah mit Hilfe eines mit Mikrometerschraube verschiebbaren Mikroskops.

E. Die Resultate.

In den folgenden Tabellen sind neben den Werten von φ die unmittelbar beobachteten und die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten entsprechenden Durchmesser der Isothermen: d beob. d ber. in $^{c}/_{m}$ angegeben. Unter jeder Tabelle befindet sich der Wert von $100\ \frac{a}{b} = \left[100\ \frac{d_o}{d_{180}}\right]_{ber.}$ In der untersten Reihe stehen die absoluten und die relativen Größen des mittleren Fehlers ε. D bedeutet den Durchmesser der Platte, h ihre Dicke.

Tafel XIII.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	1,080	1,080	1,788	1,790	1,958	1,953	2,396	2,397
30°	1,070	1,071	1,773	1,781	1,938	1,945	2,420	2,384
60°	1,054	1,055	1,758	1,764	1,937	1,930	2,391	2,356
90°	1,047	1,047	1,748	1,755	1,917	1,923	2,334	2,342
120°	1,057	1,055	1,775	1,764	1,935	1,930	3,332	2,356
150°	1,070	1,071	1,786	1,781	1,940	1,945	2,355	2,384
$100\frac{a}{b}$	103,1		102,0		101,6		102,3	
ε	$\pm$0,001	0,1%	$\pm$0,009	0,5%	$\pm$0,007	0,4%	$\pm$0,032	1,3%
0°	2,600	2,592	2,763	2,768	3,516	3,509		
30°	2,580	2,585	2,788	2,759	3,510	3,501		
60°	2,566	2,571	2,750	2,740	3,513	3,485		
90°	2,572	2,564	2,726	2,731	3,480	3,477		
120°	2,569	2,571	2,733	2,740	3,456	3,485		
150°	2,580	2,585	2,737	2,759	3,484	3,501		
$100\frac{a}{b}$	101,1		101,4		100,9			
ε	$\pm$0,007	0,3%	$\pm$0,020	0,7%	$\pm$0,022	0,6%		

$D = 6{,}6^{cm}$ $\qquad$ $h = 4^{mm}$

Mittel: $100\frac{a}{b} = 101{,}8 \pm 0{,}3$ $\qquad$ $\left[100\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 103{,}8 \pm 0{,}6$

1. Zinn-Kadmium-Legierung.

Aus der 1,5 % gedehnten Platte war eine Scheibe von 6,6 $^{cm}/_{m}$ Durchmesser und 4 $^{mm}/_{m}$ Dicke ausgeschnitten. Die mit ihr erhaltenen Zahlen sind in der Tafel XIII zusammengestellt. Nach Abdrehung der Scheibe auf

Tafel XIV.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	0,627	0,628	0,929	0,926	1,412	1,410
30°	0,629	0,625	0,923	0,918	1,406	1,406
60°	0,620	0,619	0,922	0,904	1,416	1,399
90°	0,616	0,616	0.888	0 896	1,398	1,396
120°	0,616	0,619	0,900	0,904	1,386	1,399
150°	0,623	0,625	0,905	0,918	1,400	1,406
$100\,\frac{a}{b}$	102,0		103,3		101,0	
ε	$\pm$ 0,003	0,5%	$\pm$ 0,012	1,3%	$\pm$ 0,011	0,8%
0°	1,998	1,989	2,890	2,905	3,528	3,538
30°	1,965	1,981	2,900	2,890	3,550	3,526
60°	1,970	1,961	2,866	2,863	3,524	3,504
90°	1,941	1,952	2,840	2,850	3,490	3,494
120°	1,973	1,961	2,870	2,863	3,486	3,504
150°	1,976	1,981	2,900	2,890	3,515	3,526
$100\,\frac{a}{b}$	101,9		101,9		101,3	
ε	$\pm$ 0,013	0,7%	$\pm$ 0,012	0,4%	$\pm$ 0,020	0,6%

$D = 66^{mm}$ $\qquad h = 1^{mm}$

Mittel: $100\,\frac{a}{b} = 101{,}9 \pm 0{,}3$ $\qquad \left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 103{,}8 \pm 0{,}6$

$1\,\frac{m'}{m}$ wurden die Versuche wiederholt und die betreffenden Zahlen in der Tafel XIV eingetragen. Die Resultate unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander.

Tafel XV enthält die Werte für die 0,6 % gedehnte Legierung.

Tafel XV.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	2,375	2,389	2,604	2,600
30°	2,403	2,396	2,606	2,607
60°	2,404	2,411	2,609	2,622
90°	2,415	2,418	2,633	2,629
120°	2,415	2,411	2,630	2,622
150°	2,409	2,396	2,608	2,607
$100\,\frac{a}{b}$	98,8		98,9	
ε	$\pm$ 0,011	0,5%	$\pm$ 0,008	0,3%
0°	2,668	2,665	3,250	3,259
30°	2,673	2,673	2,260	3,264
60°	2,700	2,689	3,260	3,276
90°	2,700	2,698	3,280	3,282
120°	2,677	2,689	3,290	3,276
150°	2,670	2,673	3,275	3,264
$100\,\frac{a}{b}$	98,8		99,3	
ε	$\pm$ 0,009	0,3 %	$\pm$ 0,014	0,4 %

$D = 71^{mm}$ $\qquad h = 1{,}5^{mm}$

Mittel: $100\,\frac{a}{b} = 98{,}95 \pm 0{,}12$ $\qquad \left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term} = 97{,}9 \pm 0{,}2$

Tafel XVI.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	0,852	0,852	1,152	1,153
30°	0,842	0,844	1,148	1,145
60°	0,833	0,830	1,114	1,129
90°	0,824	0,823	1,127	1,122
120°	0,824	0,830	1,136	1,129
150°	0,848	0,844	1,146	1,145
$100\,\frac{a}{b}$	103,5		102,8	
ε	$\pm$ 0,004	0,5 %	$\pm$ 0,009	0,8%
0°	1,473	1,471	1,890	1,882
30°	1,443	1,457	1,860	1,868
60°	1,420	1,431	1,830	1,843
90°	1,420	1,418	1,835	1,829
120°	1,440	1,431	1,845	1,843
150°	1,470	1,457	1,870	1,868
$100\,\frac{a}{b}$	103,7		102,9	
ε	$\pm$ 0,012	0,9 %	$\pm$ 0,009	0,5%

$D = 50^{mm}$ $\qquad h = 1^{mm}$

Mittel: $100\,\frac{a}{b} = 103{,}2 \pm 0{,}2$ $\qquad \left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 106{,}4 \pm 0{,}4$

Tafel XVII.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	1,05	1,04	1,69	1,69	2,04	2,02
30°	1,01	1,01	1,61	1,63	1,95	1,97
60°	0,97	0,97	1,50	1,52	1,85	1,86
90°	0,94	0,94	1,47	1,47	1,80	1,81
120°	0,97	0,97	1,54	1,52	1,90	1,86
150°	1,02	1,01	1,64	1,63	1,98	1,98
$100\,\frac{a}{b}$	110,6		115,0		111,6	
ε	$\pm$ 0,003	0,3%	$\pm$ 0,017	1,0%	$\pm$ 0,026	1,3%
0°	2,09	2,09	2,32	2,33	2,72	2,70
30°	1,97	2,01	2,22	2,25	2,55	2,59
60°	1,85	1,88	2,19	2,12	2,34	2,40
90°	1,82	1,82	2,02	2,06	2,34	2,33
120°	1,90	1,88	2,12	2,12	2,47	2,40
150°	2,05	2,01	2,28	2,25	2,63	2,59
$100\,\frac{a}{b}$	114,8		113,1		116,0	
ε	$\pm$ 0,034	1,7%	$\pm$ 0,028	1,2%	$\pm$ 0,055	2,1%

$D = 44^{mm}$ $\qquad$ $h = 1^{mm}$

Mittel : $100\,\frac{a}{b} = 113{,}5 \pm 0{,}8$ $\qquad$ $\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 128{,}8 \pm 1{,}6$

2. Elektrolytisches Kupfer.

Die Resultate sind in Tafel XVI zusammengestellt. Es war unmöglich, größere Kurven zu erhalten, sie wurden sehr verwaschen und unregelmäßig ; überhaupt gelang es nur mit größter Vorsicht, und Sorgfalt mit Kupfer einigermaßen gute Kurven zu bekommen.

Tafel XVIII.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	1,69	1,70	1,73	1,73	1,82	1,80	1,94	1,94	1,85	1,85
30°	1,68	1,68	1,70	1,71	1,74	1,77	1,92	1,92	1,83	1,82
60°	1,64	1,65	1,67	1,68	1,72	1,73	1,87	1,88	1,77	1,77
90°	1,62	1,63	1,66	1,66	1,69	1,70	1,84	1,85	1,73	1,74
120°	1,66	1,65	1,70	1,68	1,75	1,73	1,90	1,88	1,77	1,77
150°	1,70	1,68	1,71	1,71	1,77	1,77	1,93	1,92	1,83	1,82
$100\,\frac{a}{b}$	104,3		104,2		105,9		104,9		106,3	
ε	$\pm$ 0,014	0,8%	$\pm$ 0,012	0,7%	$\pm$ 0,027	1,5%	$\pm$ 0,011	0,6%	$\pm$ 0,010	0,5%
0°	1,98	1,98	2,02	2,00	2,46	2,46	2,67	2,68		
30°	1,95	1,94	1,93	1,96	2,42	2,41	2,62	2,62		
60°	1,90	1,88	1,85	1,89	2,32	2,31	2,49	2,51		
90°	1,84	1,85	1,86	1,85	2,25	2,26	2,46	2,46		
120°	1,88	1,88	1,92	1,89	2,31	2,31	2,53	2,51		
150°	1,92	1,94	1,97	1,96	2,40	2,41	2,64	2,62		
$100\,\frac{a}{b}$	107,0		108,1		108,9		108,9			
ε	$\pm$ 0,016	0,8%	$\pm$ 0,030	1,5%	$\pm$ 0,010	0,4%	$\pm$ 0,018	0,7%		

$D = 49^{mm}$
$h = 1^{mm}$

Mittel : $100\,\frac{a}{b} = 106,5 \pm 0,6$

$\left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 113,4 \pm 1,2$

Tafel XIX.

φ	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.	d beob.	d ber.
0°	1,805	1,837	1,885	1,894	2,890	2,893	3,080	3,085
30°	1,825	1,840	1,910	1,903	2,900	2,900	3,107	3,105
60°	1,850	1,847	1,920	1,923	2,905	2,914	3,102	3,142
90°	1,850	1,851	1,935	1,934	2,930	2,922	3,180	3,161
120°	1,850	1,847	1,920	1,923	2,915	2,914	3,150	3,142
150°	1,840	1,840	1,910	1,903	2,910	2,900	3,127	3,105
$100\,\frac{a}{b}$	99,2		97,9		99,0		97,6	
ε	$\pm$0,018	1,0%	$\pm$0,007	0,4%	$\pm$0,007	0,2%	$\pm$0,025	0,8%

$D = 58^{mm}$ $\qquad h = 1{,}5^{mm}$

Mittel: $100\,\frac{a}{b} = 98{,}4 \pm 0{,}4$ $\qquad \left[100\,\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}\right]_{term.} = 96{,}8 \pm 08$

3. Reines Zinn.

Die Zahlen für die 1,5 % gedehnte Platte sind in der Tafel XVII, die für 5 % gedehnte in der Tafel XVIII zusammengestellt. Wie aus den elektrischen Messungen zu erwarten war, zeigt die zweite kleinere Effekte trotz der größeren Dehnung.

Beide Effekte sind recht groß und es kann Bedenken erregen, ob hier nicht die Randwirkung der kreisförmigen Begrenzung auf die Resultate von Einfluß ist. Überlegt man an der Hand der Gleichung (8) den Sinn dieser Wirkung näher, so sieht man leicht, daß sie in einer Verminderung der Abplattung der Kurven sich äußern muß. Da sie sich um so mehr fühlbar macht, je näher man dem Rande kommt, so müßte man erwarten, daß die Exzentrizität der Ellipsen mit wachsendem Durchmesser abnehmen soll; das ist aber hier

nicht der Fall, man merkt vielmehr eine entgegengesetzte Tendenz in den beiden Beobachtungsreihen. Daraus kann man schließen, daß bei der erreichten Größe der Schmelzkurven die Randwirkung noch nicht von merklichem Einfluß ist.

4. Nickel.

Die auf der Nickelplatte erzeugten Isothermen wichen so wenig von der Kreisgestalt ab, daß es unmöglich war, eine Anisotropie wahrzunehmen. Zufällige Einflüsse machten bald die eine, bald die andere Achse um eine Kleinigkeit größer, und diese Fehler überdeckten die eventuell vorhandene Richtungsverschiedenheit vollständig.

Ich beschränke mich deshalb auf die Mitteilung dieses Resultates, ohne genaue Zahlen anzugeben.

5. Unreines Zinn.

Die Zahlen sind in Tafel XIX zusammengestellt.

F. Vergleichung mit den elektrischen Messungen.

Die Werte des Verhältnisses der beiden Hauptleitfähigkeiten für die Wärme, die aus diesen Messungen folgen, können mit den entsprechenden Werten für die Elektrizitätsleitung verglichen werden. Tafel XX enthält die Zusammenstellung der entsprechenden Daten:

Tafel XX.

Metall	Dehnung	$100\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}$	
		elektrisch	thermisch
Elektrolytisches Kupfer . .	10,5 %	101,1	106,4
Reines Zinn	1,5 %	107,8	128,8
» »	5 %	101,7	113,4
Unreines Zinn	2,7 %	98,8	96,8
Zinn-Kadmium	0,6 %	99,6	97,9
» »	1,5 %	101,5	103,7

Man ersieht aus diesen Zahlen, daß zwar die Richtungen der größten und kleinsten Leitfähigkeit für die beiden Arten der Leitung dieselben sind, doch ist der relative Unterschied bei der Wärmeleitung ausnahmslos größer als bei der Elektrizitätsleitung und zwar betragen die einen Zahlen das 2,5- bis 8-fache der anderen.

Soweit die gewonnenen Resultate eine Verallgemeinerung zulassen, kann man diese so fassen:

Für die in verschiedenen Richtungen einer permanent gedehnten Metallplatte gemessenen Wärme- und Elektrizitätsleitfähigkeiten gilt das Franz-Wiedemann'sche Gesetz qualitativ, aber nicht quantitativ. Die relativen Unterschiede zwischen den Maximis und Minimis sind für die Wärme beträchtlich größer als für die Elektrizität.

Dieses Verhalten entspricht übrigens dem Verhalten verschiedener Metalle, bei denen die Unterschiede der Wärmeleitung in der Regel größer sind als die der Elektrizitätsleitung.

G. Vergleichung der gedehnten Metalle mit den ungedehnten. Meßmethode.

Nachdem sich eine nur begrenzte Anwendbarkeit des Franz-Wiedemann'schen Gesetzes auf die in verschiedenen Richtungen gedehnten Metalle herausgestellt hat, war es richtig zu prüfen, inwieweit dieses Gesetz seine Geltung behält, wenn man das gedehnte Metall mit dem ungedehnten vergleicht.

Dazu war eine Methode gewählt, die der von Ingenhouss[1] benutzten im Prinzip glich. Die zu untersuchenden Stäbchen waren an ihren Enden auf bestimmte, konstante Temperaturen gebracht, von denen die niedrigere der der Umgebung gleich war.

Ihre Seiten waren mit Elaidinsäure überzogen, die erlaubte, nach dem schon ein stationärer Zustand eingetreten war, die Lage einer bestimmten Isotherme festzuhalten, deren Abstand von dem höher temperierten Ende gemessen wurde.

Ingenhouss benutzte so lange Stäbchen, daß bei Erwärmung des einen Endes das zweite von selbst auf der Temperatur der Umgebung blieb, was praktisch einer unendlich langen Stange entsprach. Hier dagegen war die Länge der Stäbchen endlich und demgemäß mußte die von Ingenhouss benutzte Formel umgeändert werden.

Wir bezeichnen mit ϑ_1 und ϑ_2 die höhere, bzw. niedrigere der beiden Endtemperaturen des Stäbchens, mit ϑ_u die der Umgebung, die wir aber als Anfang der Temperaturskala annehmen, folglich $\vartheta_u = 0$ setzen

[1] Ingenhouss. Journ. de phys. XXXIV.

können. L sei die Länge des Stäbchens, x die Entfernung der Schmelzkurve von der wärmeren Wärmequelle, also die Strecke, um welche die Isotherme θ_0, die der Schmelztemperatur des Überzuges entspricht, fortgeschritten ist ; λ sei die innere, $\bar{\lambda}$ die äußere Leitfähigkeit, q der Querschnitt, p der Umfang des Stäbchens.

Die Differentialgleichung für die Wärmeleitung lautet dann :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = - \frac{\bar{\lambda} p}{\lambda q} \theta = - a^2 \theta \qquad (11)$$

dabei ist :

$$a = \sqrt{\frac{\bar{\lambda} . p}{\lambda . q}} \qquad (12)$$

Integriert man diese Gleichung und führt die Endbedingungen ein, so folgt, da für θ_0 $x = x_0$ ist :

$$\theta_0 = \frac{1}{e^{aL} - e^{-aL}} \left[\theta_2 \left(e^{ax_0} - e^{-ax_0} \right) + \theta_1 \left(e^{a(L-x_0)} - e^{-a(L-x_0)} \right) \right] \qquad (13)$$

Nimmt man weiter an, die Temperatur θ_2 sei der der Umgebung gleich, also

$$\theta_2 = \theta_u = 0$$

und stellt die Gleichung für zwei Stäbchen auf, die die gleiche Länge haben, aber verschiedene Koeffizienten a, so folgt aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke, wenn a′ und x'_0 die für das zweite Stäbchen geltenden Größen sind :

$$\frac{e^{a(L-x_0)} - e^{-a(L-x_0)}}{e^{aL} - e^{-aL}} = \frac{e^{a'(L-x_0')} - e^{-a'(L-x_0')}}{e^{a'L} - e^{-a'L}} \qquad (14)$$

Setzt man

$$a' = a + \alpha$$

$$L - x_0 = h \qquad\qquad L - x'_0 = h' \quad ,$$

so kann man die rechte Seite der Gleichung (14) nach den aufsteigenden Potenzen von α entwickeln. Beschränkt man sich dabei auf die Glieder erster Ordnung und berücksichtigt die Annäherungsformel:

$$\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{ax} - e^{-ax}} = 1 + 2e^{-2ax} \qquad (15)$$

so gelangt man zu der Annäherungsgleichung:

$$e^{ah} - e^{-ah} = \left(e^{ah'} - e^{-ah'}\right) \frac{1 + \left(1 + 2e^{-2ah'}\right)\alpha h'}{1 + \left(1 + 2e^{-2aL}\right)\alpha L} \cdot$$

Setzt man weiter

$$h' = h + \chi$$

und entwickelt den Zähler nach steigenden Potenzen von χ, so folgt, wenn man die Glieder mit χ^2 und $\chi\alpha$ vernachlässigt:

$$1 + a\chi + h\alpha = 1 + \alpha L \left(1 + 2e^{-2a\alpha}\right) \cdot$$

Vernachlässigt man schließlich $2e^{-2a\alpha}$ gegen 1, so bleibt:

$$a\chi = \alpha (L - h) = \alpha x_0 \, .$$

Oder:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = - \frac{\Delta a}{a} \quad . \qquad (16)$$

Nimmt man in Gl. (12) λ, p und q als konstant an, also setzt bei den Stäbchen gleiche Form und gleiche Oberflächenleitung voraus, so ist:

$$\frac{\Delta a}{a} = - \frac{1}{2} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad .$$

Es folgt aus (16):

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \quad .$$

Integriert gibt dies:

$$\log x_0 = \frac{1}{2} \log \lambda \; .$$

Also ist die Formel in unserem Falle in erster Annäherung die gleiche wie die für unendliche Stäbe. Das Verhältnis der Leitfähigkeiten wird nach der Formel berechnet:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \quad . \qquad (17)$$

H. Material und Ausführung.

Die Untersuchung war nur mit Zinn vorgenommen; denn nur dieses Material zeigte genügend große Effekte, um mit dieser Methode untersucht werden zu können.

Dieselben Stäbchen, die ich für die Messung der

elektrischen Leitfähigkeit benutzte, waren auch jetzt der Untersuchung unterzogen; den Bedingungen der Theorie gemäß, waren sie auf die gleiche Länge von 84 $^{m'}_{m}$ gebracht. Ihre Querschnitte waren beinahe dieselben, die kleinen Abweichungen wurden nachher bei den Korrektionen berücksichtigt.

Um der äußeren Leitfähigkeit, die möglicherweise bei der Dehnung geändert war, denselben Wert für alle Stäbchen zu geben, wurden dieselben sehr dünn vergoldet. Die Elaidinsäure wurde in sehr dünnen Schichten auf zwei gegenüberliegende Seiten angebracht, um bei jedem Versuch zwei Messungen zu gestatten; die zwei anderen, blanken Seiten dienten zur raschen Abkühlung durch Berührung mit dicken Kupferplatten.

Als Wärmereservoire dienten zwei durchbohrte Kupferklötze, durch deren Durchbohrungen Wasserdampf, bzw. Leitungswasser hindurchgeleitet war. Der eine war also auf der konstanten Temperatur von 100° gehalten (die geringen Abweichungen wegen der Barometerhöhe können hier vernachlässigt werden), während der zweite durch Wasserkühlung auf die der Umgebung gebracht werden mußte. Er besaß eine zweite angebohrte Vertiefung in der, in etwas Quecksilber eingetaucht, ein Thermometer steckte, der seine Temperatur zu messen erlaubte.

Die Klötze waren vertikal übereinander gestellt, der heiße über den kalten, und das zu untersuchende Stäbchen zwischen sie geklemmt. Eine Feder mit Geradführung, mit welcher der untere Klotz versehen war, bewirkte ein normales und gleichmäßiges Anpressen des Stäbchens an die Kupfermassen. Sowohl die Stäbchenenden, wie die Berührungsflächen des Kupfers waren amalgamiert, um einen sicheren Kontakt herzustellen.

Um die direkte Strahlung zu vermeiden, war der obere, heiße Block mit einem Asbestschirm umgeben, der nur einige Millimeter von ihm entfernt und mit einer Öffnung versehen war, durch die die Stäbchen durchgesteckt werden konnten, ohne die Schirmwände zu berühren. Ein zweiter großer Schirm aus Karton schützte die ganze Einrichtung vor der Flamme und dem Glaskolben, die als Dampfquelle dienten. Die Dampfzuleitungsröhren waren in Watte eingepackt. Ein Thermometer, das nahe dem Stäbchen angebracht war, zeigte die dort herrschende Umgebungstemperatur an.

Der Gang der Versuche war folgender: nachdem das obere Kupfer genügend lange geheizt und das untere etwas unter die Umgebungstemperatur abgekühlt war, wurde das mit Elaidinsäure überzogene Stäbchen zwischen dieselben gebracht. Die durch das Stäbchen geleitete Wärme ließ die Temperatur des unteren Blockes allmählig steigen; die Wasserkühlung war so reguliert, daß dieses Steigen sehr langsam erfolgte (0,1° in 3 bis 5 Minuten), so daß der jederzeitige Zustand als stationär angesehen werden konnte. Sobald die Temperatur des unteren Kupferstückes die der Umgebung erreichte, wurde das Stäbchen herausgenommen, abgekühlt und die Länge x der geschmolzenen Schicht gemessen.

J. Korrektionen und Genauigkeit.

Da die Umgebungstemperatur nicht konstant gehalten werden konnte, so war es nötig, wegen ihrer Unterschiede eine Korrektion anzubringen.

Betrachtet man in der Gleichung (13) ϑ_1 und ϑ_0 als

konstant, ϑ_2 als veränderlich, und differenziert man nach x_0, so erhält man :

$$d\vartheta_2\left(e^{ax_0}-e^{-ax_0}\right)=a\left[\vartheta_1\left(e^{a(L-x_0)}+e^{-a(L-x_0)}\right)-\vartheta_2\left(e^{ax_0}+e^{-ax_0}\right)\right]dx$$

Nun ist angenähert :

$$\frac{e^{a(L-x_0)}+e^{-a(L-x_0)}}{e^{ax_0}-e^{-ax_0}}=\frac{e^{a(L-x)}}{e^{ax}}\left(1+e^{-2a(L-x_0)}+e^{-2ax_0}\right)$$

$$=e^{-a(2x_0-L)}$$

wenn man e^{-2ax_0} und $e^{-2a(L-x_0)}$ gegen die Einheit vernachlässigt. Berücksichtigt man auch (15), so folgt :

$$d\vartheta_2 = a\left(\vartheta_1 e^{-a(2x_0-L)}-\vartheta_2\right)dx_0 \quad .$$

Die rechte Seite enthält zweimal die unbekannte Größe a ; folglich ist die Ausrechnung der Korrektion aus den Daten der experimentellen Anordnung nicht möglich. Da aber ϑ_1 und ϑ_2 sehr wenig wechseln, so genügt es für die Korrektur, wenn man den Klammerausdruck als konstant annimmt und schreibt :

$$d\vartheta_2 = k\,.\,dx_0\,.$$

Der Koeffizient k mußte dann aus den Messungen selbst abgeleitet werden ; das geschah so, daß er für jedes Stäbchen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurde, und dann der Mittelwert aus diesen Einzelwerten für die Durchführung der Korrektion benutzt wurde.

Eine zweite Korrektur war wegen der nicht ganz gleichen Querschnitte nötig.

Da a und x immer zusammen als Produkt ax auftreten, so muß, beim Konstanthalten aller übrigen Größen:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{da}{a} = -\frac{d\sqrt{\frac{\lambda p}{\lambda q}}}{\sqrt{\frac{\lambda p}{\lambda q}}} \quad .$$

Die Querschnitte waren nahezu quadratisch; für diesen Fall gilt aber:

$$qdp - pdq = -\frac{1}{2} pdq \quad .$$

Aus zwei letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{4}\frac{dq}{q} \quad .$$

Diese Korrektionen waren sehr klein und betrugen höchstens 0,2 $^{m}/_{m}$.

Mit jedem Stäbchen wurden 5 oder 6 Versuche gemacht; die Werte von x wichen ziemlich stark voneinander ab; die mittleren Fehler schwankten zwischen 0,2 % bis 1,0 %; nur in einem Falle erreichte der Fehler 1,6 % Doch waren die Unterschiede in der Leitfähigkeit deutlich genug, um wenigstens den Sinn der Änderung sicher feststellen zu können.

K. Die Resultate.

In der Tabelle XXI sind die schon nach Querschnitt und Temperatur korrigierten Zahlen zusammengestellt; die dritte Kolonne derselben enthält die für jedes Stäb-

chen geltenden Mittelwerte von x nebst der mittleren Fehler. Die vierte Kolonne enthält die für jede Sorte gebildeten Mittelwerte ; in den drei letzten sind die Verhältnisse der Größen x und weiter die der Leitfähigkeiten zusammengestellt. Die zwei letzten Reihen können mit den entsprechenden Zahlen der elektrischen Messung und der Isothermenmethode verglichen werden.

Vergleicht man die Zahlen der letzten Kolonne mit den entsprechenden Daten aus der Tafel XX, so sieht man, daß die mit der letzten Methode gefundenen Unterschiede in der Leitfähigkeit, kleiner sind als die, die nach der Sénarmont'schen Methode sich ergeben haben ; die Verkleinerung ist jedoch in demselben Maße eingetreten [1]. Daraus schließen wir, daß entweder die Manipulationen, welchen die Stäbchen unterworfen waren, bevor sie in der thermischen Messung benutzt worden sind, kleine Deformationen verursacht haben, und diese die ursprünglichen Effekte teilweise verdeckten, — oder daß noch irgendwelche unberücksichtigte Umstände die Empfindlichkeit der Methode herabgesetzt haben. Der Sinn der Änderung ist aber deutlich genug ausgeprägt ; die Methode, für genaue, quantitative Messungen ungeeignet, reicht noch aus, um eine qualitative Beurteilung zu erlauben. Mit dieser Beschränkung darf man also aus den vorliegenden Resultaten auch über die Änderung der Leitfähigkeit nach der Dehnung Schlüsse ziehen.

Sieht man die Zahlen der Kolonne 5 und 6 an, und sieht von denen der Reihe V ab, die zu stark divergierende Werte enthält, so ergibt sich, daß nur in der

[1] Doch sind sie in beiden Fällen noch größer, als die für die elektrische Leitfähigkeit gefundenen, was die ausgesagte Abweichung vom Franz-Wiedemann'schen Gesetze nur bekräftigt.

Tafel XXI.

	Dehnungsrichtung		Dehnung	X	Mittel	$100\frac{X}{X_u}$	$100\frac{\lambda}{\lambda_u}$	$100\frac{\lambda_L}{\lambda_Q}$
I	Ungedehnt	1 2	0	51,5 ± 0,4 52,4 ± 0,6	51,9	100,0	100,0	—
II	Längs gedehnt	1 2	1,5 %	53,9 ± 0,1 53,4 ± 0,4	53,7	103,5	107,1	110,5
III	Quer gedehnt.	1 2		50,6 ± 0,8 51,6 ± 0,5	51,1	98,5	97,0	
IV	Längs gedehnt	1	5 %	53,6 ± 0,4	53,6	103,3	106,7	104,6
V	Quer gedehnt	1 2		51,2 ± 0,3 53,8 ± 0,3	52,4	101,0	102,0	
	1		2	3	4	5	6	7

Reihe III eine Abnahme des Leitvermögens nach der Dehnung festzustellen ist. Dagegen zeigen die Reihen II und IV einen Zuwachs der Leitfähigkeit, d. h. : diese ist nach der Dehnung in der longitudinalen Richtung gewachsen.

Die elektrischen Messungen ergaben für reines Zinn lauter Abnahmen der Leitfähigkeiten, die je nach der Richtung und Größe der Deformation variierten. Für die längsgedehnten Stücke, denen jetzt die Reihen II und IV entsprechen, waren Widerstandszunahmen von 0,9 % bzw. 10,5 % nachgewiesen.

Wir kommen somit zu dem Resultate, daß das Franz-Wiedemann'sche Gesetz auf die permanent gedehnten Metalle nicht anwendbar ist, insofern eine Abnahme der einen Art der Leitfähigkeit von einer Zunahme der anderen begleitet werden kann.

Da die Methode zu wenig empfindlich war, um kleinere Änderungen nachzuweisen, als die, die bei Zinn auftraten, so war sie auf andere Metalle nicht anzuwenden.

IV.

Zusammenfassung der Resultate.

Es wurden reine Metalle und Legierungen auf den Einfluß untersucht, die eine permanente Dehnung auf ihre Elektrizitäts- und Wärmeleitung ausübt. Dabei ergab sich folgendes:

a) Jedes Metall verhält sich individuell; sowohl der Sinn wie die Größe der Effekte sind verschieden.

b) Es besteht kein einfacher Zusammenhang zwischen dem Betrage der Deformation und dem der Widerstandsänderung.

c) Der Sinn der Änderung für die Dehnungsrichtung ist derselbe wie für eine dazu normale Richtung; ihre Beträge können sehr verschieden sein.

d) Eine Legierung kann im entgegengesetzten Sinne beeinflußt werden, als die sie bildenden reinen Metalle.

e) Ein kleiner Zusatz fremden Metalles kann den Einfluß der Dehnung stark ändern, und sogar seinen Sinn umkehren.

f) Das Franz-Wiedemann'sche Gesetz ist für die permanent gedehnten Metalle nicht anwendbar. Die beiden Arten der Leitfähigkeit können im verschiedenen Sinne durch die Dehnung beeinflußt werden.

g) Trotzdem stimmen die Achsen der maximalen und minimalen Leitfähigkeit in den schon gedehnten Metallen überein. Eine derselben fällt in die Richtung der Dehnung.

h) Der relative Unterschied der Leitfähigkeiten in den beiden Hauptrichtungen ist größer für die Wärme- als für die Elektrizitätsleitung.

LEBENSLAUF.

Ich, Wacław Werner, wurde am 14. Juli 1879 in Warschau als Sohn des Fabrikbesitzers Theodor Werner geboren. Ich habe im Jahre 1896 die Realschule in Warschau absolviert und wurde im selben Jahre an der elektrotechnischen Abteilung der Technischen Hochschule zu Darmstadt immatrikuliert. Dort habe ich im Jahre 1899 die Vorprüfung abgelegt. Seit dem Jahre 1902 studierte ich Physik und Mathematik, zuerst an der Universität Krakau, dann, seit 1904, an der Universität Göttingen, zuletzt, seit Herbst 1908, in Freiburg in der Schweiz, wo ich im März 1909 die mündliche Doktorprüfung magna cum laude bestand. Während meines Studiums habe ich bei folgenden Professoren und Dozenten die Vorlesungen gehört: in Darmstadt: Bernde, Berghoff-Ising, Dingeldey, Gundelfinger, Gutermuth, Henneberg, Kittler, Krauss, Lincke, Marx, Pfarr, Schering, Sengel, Staedel, Wiener, Wirtz. In Krakau: Birkenmejer, Grabski, Heinrich, Natanson, Rudzki, Russjan, Siedlecki, Straszewski, Tolloczko, Witkowski, Zaremba, Zorawski. In Göttingen: Abraham, Bestellmeyer, Goedeckemeyer, Hilbert, Krüger, Minkowski, Riecke, Simon, Stark, Tamann, Verworn, Voigt, Wiechert. In Freiburg: van Cauvelaert, Dobrzycki, Gockel, v. Kowalski.

Allen diesen Herren Professoren und Dozenten spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus.

Freiburg (Schweiz). — St. Paulusdruckerei.